شهید فهمیده
دبیرستان هیات امنایی دوره اول منطقه هفت

«درسنامه درس ریاضی»

<u>پایه هشتم</u>

گروه آموزشی ریاضی

دبیرستان متوسطه اول شهید فهمیده

سال تحصیلی ۱۴۰۲ – ۱۴۰۱


بسم الله الرحمن الرحيم

فصل اول: عددهای صحیح و گویا

بسمه تعالی

درسنامه ، نکات و تمرینات فصل اول ریاضی پایه هشتم

درس اول : عددهای صحیح

تعریف اعداد صحیح

اعداد صحیح از سه دسته تشکیل شده اند. (اعداد مثبت،صفر،اعداد منفی)

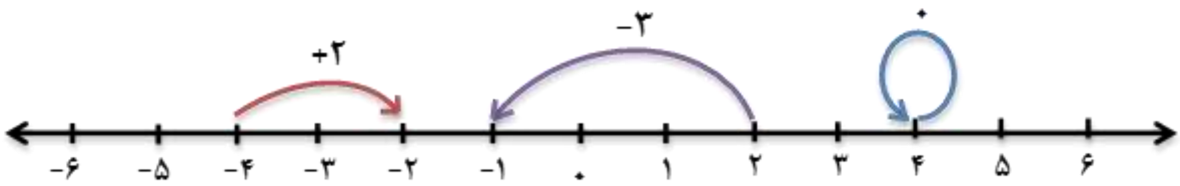
اعداد صحیح را با حرف انگلیسی $\mathbb{Z}$ نشان می دهند.

ℤ = {... و − ۲ و − ۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ...}

حرکت روی محور اعداد صحیح:

جا به جایی از یک نقطه به نقطه ی دیگر را حرکت می گویند؛ اگر این حرکت در جهت مثبت(سمت راست) باشد با علامت مثبت و اگر در جهت منفی (سمت چپ)باشد، علامت منفی خواهد داشت.

مثال:



قرینه

به اعدادی که فاصله آن ها تا (صفر)با هم برابر باشد دو عدد قرینه می گویند. مانند ۳+ و ۳-

مثال: −۲۰ = قرینه‌۲۰+

نکات مربوط به قرینه

نکته۱: قرینه را با علامت (−) نمایش می دهند.قرینه ی هر عدد صحیح را می توان با تغییر علامت آن بدست آورد.

نکته۲: قرینه ی عدد صفر برابر صفر می باشد.

نکته۳: قرینه قرینه عر عدد خود عدد می باشد.

مثال :

−(−(−۳)) = −۳   −(+۷) = −۷

−(−(+۳)) = +۳   −(−۱۲) = +۱۲

جمع و تفریق اعداد صحیح

برای محاسبه ی حاصل جمع و یا تفریق عدد های صحیح ابتدا مختصر نویسی(ساده نویسی) می کنیم به این صورت که پرانتزها رو حذف کرده ،سپس اگر عدی بیشتر از یک علامت داشته باشد، علامت های آن ها را در هم ضرب می کنیم تا به یک علامت تبدیل شود.

آنگاه با یکی از دو حالت زیر مواجه می شویم:

حالت اول: عدد ها هم علامت باشند در این حالت یکی از علامت ها را نوشته، سپس عدد ها را با هم جمع می کنیم.

مثال:

$(-۳) + (-۷) = -۱۰$

$(+۸) - (-۶) = +۸ + ۶ = +۱۴$

حالت دوم: عدد ها هم علامت نباشند در این حالت علامت عددی که بزرگتر است (بدون در نظر گرفتن علامت) را نوشته سپس عدد ها را از هم کم می کنیم.

مثال:

$(-۶) + (+۸) = -۶ + ۸ = +۲$

$۲۵ - (+۳۰) = ۲۵ - ۳۰ = -۵$

نکته: اگر تعداد عدد ها بیشتر از دو تا بود ، می توان عدد های مثبت را با هم و عدد های منفی را با هم جمع کرد سپس حاصل نهایی را بدست آورد.

مثال: $-۴ + (+۶) - (+۳) + ۷ = -۴ + ۶ - ۳ + ۷ = -۷ + ۱۳ = +۶$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس اعداد را با توجه به علامت بین آن ها ضرب یا تقسیم می کنیم.

جدول ضرب علامت ها

÷ یا ×	+	−
+	+	−
−	−	+

مثال:

$[(-۶) \times (+۴)] \div (-۳) = (-۲۴) \div (-۳) = +۸$

$-۸ \times [۱۲ \div (+۴)] = (-۸) \times (+۳) = -۲۴$

اولویت های انجام عملیات در ریاضی: برای محاسبه ی عبارت ترکیبی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم باید بر اساس ترتیب اولویت ها شروع به پاسخ دادن کرد.

۱)مجموعه یا کروشه یا پرانتز

۲)توان و جذر

۳)ضرب و تقسیم (از سمت چپ)

۴)جمع و تفریق

مثال:

حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$۴ - ۴ \times ۳^{۲} \div ۶ - (۹ - ۲^{۳}) =$$

ابتدا حاصل داخل پرانتز

$$۹ - ۲^{۳} = ۹ - ۸ = ۱$$

حال داریم

$$۴ - ۴ \times ۳^{۲} \div ۶ - ۱ =$$

سپس از سمت چپ طبق ترتیب عملیات پیش می رویم

توان و جذر

$$۴ - ۴ \times ۹ \div ۶ - ۱ =$$

مجدد از سمت چپ طبق ترتیب عملیات پیش می رویم

$$۴ - ۳۶ \div ۶ - ۱ =$$
$$۴ - ۶ - ۱ = -۳$$

بیشتر بدانیم : برای جمع اعداد یک سری منظم از رابطه های زیر استفاده می کنیم.

$$\text{تعداد اعداد} \times \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{۲} = \text{مجموع اعداد} \qquad \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله اعداد}} + ۱ = \text{تعداد اعداد}$$

مثال:

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۳ + ۶ + ۹ + \cdots + ۲۰۴ =$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۲۰۴ - ۳}{۳} + ۱ = ۶۷ + ۱ = ۶۸$$

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{۲۰۴ + ۳}{۲} \times ۶۸ = ۲۰۷ \times ۳۴ = ۷۰۳۸$$

نکته: برای جمع اعداد یک سری منظم که یک در میان مثبت و منفی باشند ابتدا دو به دو اعداد را جواب می دهیم.

مثال :

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\overbrace{۱۰ - ۱۲}^{-۲} + \overbrace{۱۴ - ۱۶}^{-۲} + \cdots + \overbrace{۱۰۲ - ۱۰۴}^{-۲} =$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۱۰۴ - ۱۰}{۲} + ۱ = ۴۷ + ۱ = ۴۸$$

$$۴۸ \div ۲ = ۲۴$$

$$۱۰ - ۱۲ + ۱۴ - ۱۶ + \cdots + ۱۰۲ - ۱۰۴ = = ۲۴ \times -۲ = -۴۸$$

درس دوم : عددهای گویا

تعریف اعداد گویا

هر عدد را که بتوان به صورت یک کسر نوشت، به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و مخرج آن صفر نباشد را عدد گویا می نامند.

اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند.

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a و b \in Z \text{ و } b \neq ۰\right\}$$

توجه : بنابراین عددهای طبیعی ، حسابی ، صحیح ،کسری ، اعشاری ، مخلوط و رادیکال هایی که عدد زیر رادیکال آن مجذور کامل باشد یک عدد گویا می باشند.

مثال :

$$۰ = \frac{۰}{۱} \qquad \sqrt{۲۵} = ۵ = \frac{۵}{۱} \qquad -۲\frac{۳}{۴} \qquad ۰/۷ = \frac{۷}{۱۰} \qquad \frac{۸}{-۳} \qquad ۱۳ = \frac{۱۳}{۱} \qquad -\frac{۵}{۶}$$

توجه : اگر مخرج کسری صفر باشد، کسر را تعریف نشده می نامند.

نمایش اعداد گویا روی محور

برای نمایش هر عدد گویا روی محور طبق مراحل زیر عمل می کنیم :

۱) واحدهای محور را به تعداد عدد مخرج کسر تقسیم می کنیم.

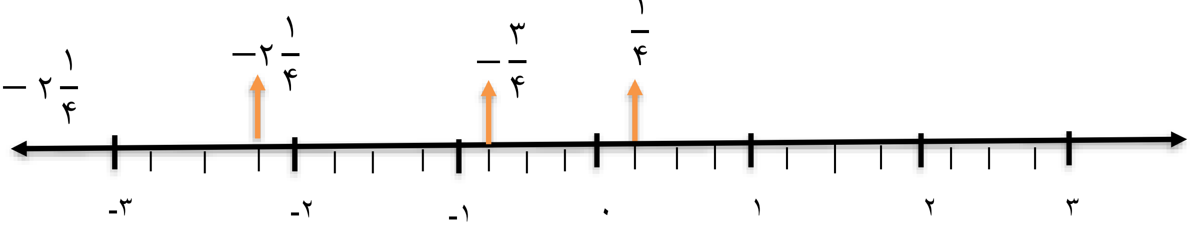
۲) با توجه به علامت عدد، جهت حرکت را مشخص می کنیم، علامت + حرکت به سمت راست و علامت − حرکت به سمت چپ است.

۳) به تعداد عدد صورت کسر از صفر ، واحدهای تقسیم شده را شمارش می کنیم.

مثال:

عددهای مقابل را مانند نمونه روی محور نمایش دهید.

$-۲\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ و $-\frac{۳}{۴}$



نکته : قرینه ی اعداد گویا همانند قرینه عدد های صحیح می باشد.

مثال: $-\left(+\frac{۲}{۳}\right)=-\frac{۲}{۳}$ $\qquad$ $-\left(-\frac{۷}{۵}\right)=+\frac{۷}{۵}$

نکته : برای نوشتن معکوس اعداد گویا ، جای صورت و مخرج آن را عوض می کنیم.

مثال :

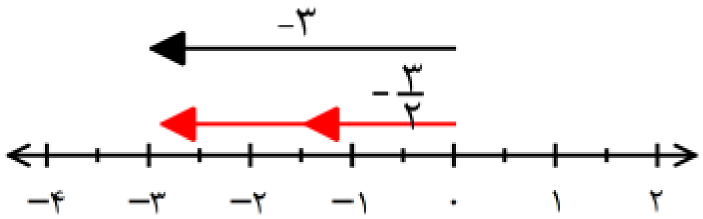
$-\frac{۱۱}{۶} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{۶}{۱۱}$

$-۴\frac{۲}{۳} \xrightarrow[-\frac{۱۴}{۳}]{\text{معکوس}} -\frac{۳}{۱۴}$

نکته : علامت کسر را می توان در کنار، صورت و یا مخرج کسر نوشت.

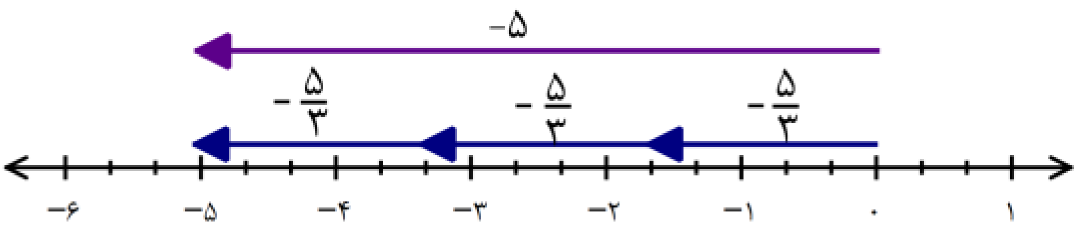
به محور زیر دقت کنید. می دانیم $\frac{-۳}{۲}$ یعنی : ۲÷۳- . برای نمایش این عدد برداری به طول ۳- رسم می کنیم و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کنیم. (مطابق محور شماره ۱) هر تکه برداری در جهت منفی محور اعداد و به طول $\frac{۳}{۲}$ واحد است. پس عدد متناظر با هر قسمت کوچک $-\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{-۳}{۲}=-۳\div۲=-\frac{۳}{۲}$$



مثال: تساوی $-\frac{۵}{۳}=-\frac{۵}{۳}$ را به کمک محور کامل کنید.

پاسخ:



محدوده ی اعداد:

اعداد بزرگتر از ۲ را به صورت $x > ۲$ نمایش می دهیم و شامل تمامی اعدادی است که از ۲ بزرگترند.

اعداد بزرگتر یا مساوی با۲ را به صورت $x \geq ۲$ نمایش می دهیم و شامل عدد ۲ و همه ی اعداد بزرگتر از ۲است.

اعداد بین ۱ و ۲ را به صورت $۱ < x < ۲$ نمایش می دهیم .

اعداد کوچکتر یا مساوی با ۲ و بزرگتر از ۱ را با $۱ < x \leq ۲$ نمایش می دهند و شامل عدد ۲ و تمام اعداد بین ۱ و ۲ است.

مثال: برای هر کدام از محدوده های زیر دو عدد مثال بزنید:

$x > ۲$	$۱ < x \leq ۲$	$۰ < x \leq ۱$	$-۱ < x \leq ۰$	$x \leq -۱$
۳ و ۸/۷۵	۲ و ۱/۸	-۱ و $\frac{۸}{۱۱}$	$-\frac{۱}{۵}$ و $-\frac{۸}{۱۱}$	-۴ و $-\frac{۸}{۳}$

درس سوم : تساوی کسرها

اگر صورت و مخرج کسر را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم ، یا بر عددی غیر از صفر تقسیم کنیم ،کسر حاصل با کسر اول مساوی می باشد.

مثال:

× ٤

× ۳

× ۲

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{۸}$$

× ۲

× ۳

× ٤

تمرین: برای هر کسر زیر ۲ کسر مساوی بنویسید

$$\frac{۳}{۵}=\frac{}{}=\frac{}{}$$

نکته: در تساوی دو کسر اگر یکی از عدد ها مجهول بود به کمک تساوی کسر ها می توان مقدار مجهول را به دست آورد.

مثال: مانند نمونه مقدار مجهول را به دست آورید

$$\frac{۳}{۷}=\frac{x}{۲۸} \qquad X=۳\times۴=۱۲$$

$$\frac{X}{۱۰}=\frac{۱۰}{۴}$$

$$\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{X}{۳۶}$$

توجه : برای اینکه یک کسر را تا حد ممکن ساده کنیم باید صورت و مخرج آن را بر «ب.م.م» صورت و مخرج تقسیم کنیم.

توجه : برای به دست آوردن «ب.م.م» ابتدا دو عدد را به عامل های اول تجزیه می کنیم، سپس حاصل ضرب عامل های مشترک دو عدد با توان کمتر را حساب می کنیم.

تمرین : کسر زیر را مانند نمونه تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{-۵۶}{۲۱۰} =$$

حل:

$$۲۱۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \qquad ۵۶ = ۲^{۳} \times ۷$$

$$\left(۵۶ \text{ و } ۲۱۰\right) = ۲ \times ۷ = ۱۴$$

$$\frac{۵۶ \div ۱۴}{۲۱۰ \div ۱۴} = \frac{-۴}{۱۵}$$

$$\frac{۴۸}{۱۰۰} =?$$

نکته : از تساوی کسر ها می توان نتیجه گرفت که هر کسر گویا بی شمار نمایش مختلف دارد.

نکته : نوشتن عددی گویا بین دو عدد به چند روش است که یک روش کاربردی آن در زیر آورده شده

ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد کسر های خواسته شده ضرب می کنیم.

توجه : با توجه به تقسیم شدن فاصله ی بین دو عدد کسر های مختلفی بین هر دو عدد صحیح می توان نوشت.

توجه: بین هر دو عدد کسری نیز نیز می توان کسرهای بیشماری پیدا کرد.

مثال : ما بین دو عدد گویا ی زیر دو عدد گویا (دو کسر) پیدا کنید.

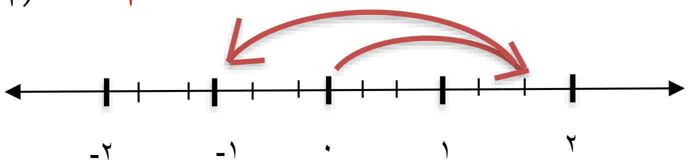
$$\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۵}{۷}$$

$$\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۵}{۷} \qquad \frac{۲۱}{۲۸} \text{ و } \frac{۲۰}{۲۸} \qquad \frac{۲۱ \times ۳}{۲۸ \times ۳} \text{ و } \frac{۲۰ \times ۳}{۲۸ \times ۳} \qquad \frac{۶۰}{۸۴} < \frac{۶۱}{۸۴} < \frac{۶۲}{۸۴} < \frac{۶۳}{۸۴}$$

جمع و تفریق اعداد گویا

روش اول با استفاده از محور: از حرکت های علامت دار روی محور استفاده می کنیم.

$$\left(+\frac{۵}{۳}\right)+\left(-\frac{۸}{۳}\right)=-\frac{۳}{۳}=-۱$$



روش دوم : هنگامیکه دو عدد گویا دارای مخرج های برابر باشند، جمع و تفریق آن ها به سادگی و مانند عدد های صحیح صورت می گیرد.

مثال:

$$\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۳+۵}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$\frac{۷}{۳}-\frac{۵}{۳}=\frac{۷-۵}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

در صورتی که مخرج ها یکسان نباشند، ابتدا مخرج ها را با استفاده از مخرج کسر دیگر یکسان می کنیم (ک.م.م)، سپس مانند قبل محاسبات جمع و یا تفریق را انجام می دهیم.

مثال:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}=\frac{۲\times۴}{۳\times۴}+\frac{۳\times۳}{۴\times۳}=\frac{۸}{۱۲}+\frac{۹}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

روش بدست آوردن ک.م.م: ابتدا هر عدد را به عامل های اول تجزیه می کنیم سپس عامل های مشترک هر دو عدد را در عامل های غیر مشترک ضرب می کنیم.

مثال:

$$[۸ \text{ و } ۱۲]=۲۴$$

$$۸=۲\times۲\times۲ \qquad \longrightarrow \qquad ۲\times۲\times۲\times۳=۲۴$$

$$۱۲=۲\times۲\times۳$$

تمرین: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$-\frac{۲}{۳}-\left(-\frac{۴}{۱۵}\right)=\frac{-۹+۸}{۳۰}=-\frac{۱}{۳۰}$$

$$\left[۱۵\text{و}۱۰\right]=۳۰$$

توجه: بهترین مخرج مشترک دو کسر ، همان ک.م.م عددهای مخرج هاست .

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\frac{۸}{۱۲}-\left(\frac{۱۲}{۱۶}\right)=$$

$$-\frac{۷}{۴}-\left(-\frac{۱۳}{۴}\right)=$$

درس چهارم

ضرب و تقسیم اعداد گویا

ضرب اعداد گویا : هنگام ضرب دو عدد گویا مراحل زیر انجام می شود

۱) ابتدا صورت را با مخرج یا بالعکس ساده کنید.(در صورت امکان)

۲) علامت های دو عدد را طبق قانون ضرب علامت ها در هم ضرب کنید.

۳) سپس صورت های دو کسر را در هم و مخرج ها نیز در هم ضرب کنید.

مثال :

$$\left(-\frac{\cancel{۳}^{۱}}{۵}\right) \times \left(+\frac{۷}{\cancel{۹}_{۳}}\right) = -\frac{۱ \times ۷}{۵ \times ۳} = -\frac{۷}{۱۵}$$

تمرین : حل کنید.

$$\left(-\frac{۲۰}{۲۱}\right) \times \left(+\frac{۲۸}{۸۰}\right) =$$

نکته : اگر در ضرب اعداد گویا عددی، عدد مخلوط بود ابتدا عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

مثال :

$$۲\frac{۳}{۵} = (۲ \times ۵) + ۳ = \frac{۱۳}{۵}$$

تقسیم اعداد گویا : هنگام تقسیم دو عدد گویا مراحل زیر را انجام دهید.

۱) کسر اول را بدون تغییر بنویسید.

۲) علامت تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را به صورت معکوس بنویسید.

۳) ضرب به دست آمده را انجام دهید.

مثال :

$$\left(-\frac{۳}{۵}\right) \div \left(+\frac{۷}{۴}\right) = \left(-\frac{۳}{۵}\right) \times \left(+\frac{۴}{۷}\right) = -\frac{۳ \times ۴}{۵ \times ۷} = -\frac{۱۲}{۳۵}$$

نکته : اگر جای صورت و مخرج یک کسر را تغییر دهیم معکوس آن کسر به دست می آید.

نکته : ساده کردن کسر ها در تقسیم بعد از اینکه به ضرب تبدیل شد الزامی است.

نکته : در صورت وجود عدد مخلوط ابتدا به کسر تبدیل کنید.

تمرین : حل کنید.

$$\left(-\frac{۳}{۵}\right) \div \left(\frac{۲}{۱۵}\right) =$$

نکته : تقسیم $\frac{۳}{۸} \div \frac{۲}{۵}$ را در نظر بگیرید. این تقسیم را می توان به صورت $\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۳}{۸}}$ نیز نوشت . محاسبه این کسر با ضرب عدد های مشخص شده انجام می شود.

یعنی ضرب عدد های دور را در صورت و ضرب عدد های نزدیک را در مخرج می نویسیم.

به این عمل «دور در دور _ نزدیک در نزدیک » گفته می شود.

مثال :

$$\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۳}{۸}} = \frac{۲ \times ۸}{۳ \times ۵} = \frac{۱۶}{۱۵}$$

تمرین: حل کنید.

$$\frac{\frac{۹}{۵}}{-\frac{۱۲}{۱۵}} =$$

نکته : تنها عددی که معکوس ندارد عدد صفر است.

نکته : حاصل ضرب هر عدد در معکوس خودش برابر ۱ می شود.

نکته : معکوس عدد ۱ خود عدد یک می شود.

ایستگاه تمرین

ایستگاه یک :

۱)حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{-۳۶ \div ۹ + (-۱۶)}{-۲ + ۳[۴ + (-۱۰)]} =$$

۲)برای هریک از جمع و تفریق های زیر، یک محور با حرکت متناظر آن رسم کنید و سپس حاصل را بنویسید.

$$-۹ - (-۶) =$$

$$-۸ + (+۴) + (+۲) =$$

۳)حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-۲۵ + ۲۵) + (-۹ - ۱۳) - (-۱۴ + ۱۵) =$$
$$-۱۵ + [۳۵ \div (-۷)] =$$

۴)حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$(۱۵ - ۱)(۱۵ - ۲)(۱۵ - ۳) \times \ldots \times (۱۵ - ۱۵) =$$

۵)مجموع اعداد صحیح بین ۱۰۰- و ۱۰۰+ را تعیین کنید.

ایستگاه دو :

۱)روی محور اعداد ، نقطه های خواسته شده را مشخص کنید.

$$A = -۳\frac{۱}{۴}$$

$$B = +\frac{۱۴}{۵}$$

$$C = \frac{۵}{۸}$$

۲)دور اعداد گویا خط بکشید.

$۹\frac{۷}{۸}$ و $-\frac{۰}{۷}$ و $\sqrt{\frac{۴۸}{۳}}$ و $-\frac{\sqrt{۱۳}}{۱۳}$ و $-\frac{۱۷}{\sqrt{۹}}$

۳)سه کسر مساوی کسر های داده شده بنویسید.

$$+\frac{۶}{۱۰} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \qquad\qquad -۳\frac{۵}{۴} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

۴)حاصل عبارت مقابل را محاسبه کرده و جواب را ساده کنید.

$$\frac{(-۱۲۸) \times (-۹۸)}{+۴۹ \times (-۹۶) \times (-۲۰)} =$$

ایستگاه سه :

۱)برای جمع و تفریق های زیر ، محور و حرکت های متناظر را رسم کنید.

$$\left(+\frac{۷}{۴}\right) + \left(-\frac{۹}{۴}\right) =$$

$$\left(+\frac{۱۲}{۵}\right) - \left(+\frac{۱۰}{۵}\right) =$$

۲)حاصل عبارت های زیر را محاسبه و سپس ساده کنید.

$$+\frac{۷}{۱۸} - \frac{۱۱}{۱۲} =$$

$$۵ - \left(\frac{۱}{۸} - ۳\frac{۵}{۱۲}\right) =$$

ایستگاه چهار:

۱)ضرب های زیر را انجام دهید.

$$\left(-\frac{۳}{۸}\right) \times \left(-\frac{۴}{۵}\right) = \qquad\qquad \left(+۳\frac{۱}{۸}\right) \times \left(-۴\frac{۴}{۵}\right) =$$

۲)معکوس اعداد مقابل را بیابید. $-\left(-\frac{۵}{۱۲}\right)$ $\qquad -۴\frac{۲}{۷}$

۳) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-۸۱) \div (+۲۱) =$$

$$\left(-۲\frac{۱}{۳}\right) \div \left(-\frac{۱}{۱۵}\right) =$$

$$\frac{-\frac{۸}{۵}}{+\frac{۲}{۲۵}} =$$

فصل ۲ : حساب اعداد طبیعی

درس اول : یادآوری عددهای اول

یادآوری :

۱)شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد : شمارنده ها همان اعدادی هستند که عدد داده شده بر آنها بخشپذیر می شود .

مانند : شمارنده های عدد ۱۵ اعداد ۱ ، ۳ ، ۵ و ۱۵ هستند

۲)تعریف عددهای اول : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که هیچ شمارنده طبیعی به جز خودش و یک نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود . مانند عدد ۵ و ۷ زیرا : ۵ و ۱ = شمارنده های ۵   ۷ و ۱ = شمارنده های ۷

۳)تعریف عدد های مرکب : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت ، عدد مرکب می نامند . مانند : ۳۰=۵×۶=۳×۱۰=۲×۱۵   ۶=۲×۳

نکته های مهم ؛

۱. عدد یک ، نه اول است و نه مرکب . (زیرا فقط یک شمارنده دارد ؛ یعنی خود یک)

۲. هر عدد اول دقیقا دو شمارنده دارد .

۳. هر عدد مرکب بیش از دو شمارنده دارد .

۴. عدد یک ، شمارنده ی همه عددهای طبیعی است .

۵. بزرگترین شمارنده هر عدد ، خود عدد است .

مضرب های طبیعی یک عدد : برای نوشتن مضرب های طبیعی یک عدد ، کافی است عدد داده شده را به ترتیب در اعداد طبیعی ضرب کنیم تا مضرب های طبیعی آن بدست بیاید .

مثال۱ : مضرب های طبیعی عددهای زیر را بنویسید.

مضرب های طبیعی۵ = ۱ × ۵ و ۲ × ۵ و ۳ × ۵ و ۴ × ۵ و ... = ۵و۱۰و۱۵و۲۰و ...

مضرب های طبیعی۶ = ۶و۱۲و۱۸و۲۴و ...

با توجه به مثال بالا می توان نکته های زیر را نتیجه گرفت :

۱. فقط اولین مضرب هر عدد اول ، عددی اول است و بقیه مضرب های آن مرکب هستند .(مثلا ۵ عددی اول است پس اولین مضرب آن یعنی خود ۵ ، اول و بقیه مضرب های آن یعنی ...و۲۰و۱۵و۱۰ مرکب هستند.)

۲.همه مضرب های یک عدد مرکب ، مرکب هستند.(مثلا ۶ عددی مرکب است پس همه مضرب های آن مرکب هستند.)

به این ترتیب : اعداد طبیعی به سه بخش تقسیم می شوند : **عدد یک ، عدد های اول ، عددد های مرکب**

مثال۲ : الف- عدد ۱۰ چند مضرب دارد؟ بی شمار

ب-چند تا از مضرب های آن عدد اول هستند؟ هیچ کدام ؛ زیرا خود ۱۰ عددی مرکب است،پس همه مضرب های آن نیز مرکب اند.

ج-تنها مضرب اول عدد ۲۳ کدام است ؟ خود عدد ۲۳

نکته مهم تعداد شمارنده های یک عدد محدود است اما تعداد مضرب های آن بی شمار؛

دو عدد متباین(نسبت به هم اول) : اگر ب.م.م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) دو عدد برابر یک باشد ، می گوییم دو عدد نسبت به هم اول هستند .

مثال۳ : عدد های ۶ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند ؛ زیرا :

۱ = (۶و۳۵) ⟵ ۶ و ۳ و ۲ و ۱ = شمارنده های ۶   ۳۵و ۵ و۷ و۱ = شمارنده های۳۵

نکته های مهم؛

۱.هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول هستند . مثال : ۱=(۱۱و۲۳)

۲.هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول هستند . مثال : ۱=(۳۱و۳۲)

۳.عدد یک و هر عدد طبیعی بزرگتر از یک نسبت به هم اول هستند . مثال : ۱=(۱و۲۵)

۴.اگر دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند ، ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) آنها از حاصل ضرب آن دو عدد بدست

می آید . مثال : اگر ۱=(۳و۴) ⟵ ک.م.م : ۱۲=۴×۳=[۳و۴]

مثال۴: الف- سه عدد مرکب بنویسید که غیر از ۲ و ۷ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

چون ۲و۷ هر دو شمارنده های اول این اعداد هستند پس باید آنها را در هم ضرب کنیم و چون غیر از ۲و۷ شمارنده اول دیگری ندارند، پس برای ساخت عدد های بعدی باید به تعداد دلخواه ۲ و ۷ را در هم ضرب کنیم .

۲×۷×۷=۹۸   ۲×۲×۲×۷=۵۶   ۲×۲×۷=۲۸   ۲×۷=۱۴

ب-آیا این عددها نسبت به عددی که شمارنده های اول آن ۷و۱۳ باشند ، اول است ؟

خیر- زیرا شمارنده مشترک ۷ را دارند . پس نسبت به هم اول نیستند .

مثال۵: اگر تعداد عدد های اول کمتر از ۳۵ ، ۱۱ عدد باشند ، تعداد عدد های مرکب کمتر از ۳۵ ، چند تا است ؟ چرا ؟

عدد های طبیعی سه بخش می شوند : یک ، عدد اول ، عدد مرکب .در اینجا از ۳۵ عدد ،۱۱ عدد ، اول هستند و یکی دیگر از آن ۳۵عدد ، عدد یک است (که نه اول و نه مرکب است) . در نتیجه (۱۲=۱۱+۱) ۱۲ عدد از ۳۵ عدد مرکب نیستند،

پس تعداد عدد های مرکب کمتر از ۳۵ : ۳۵-۱۲=۲۳

مثال۶: مجموع دو عدد اول ۲۵ ، است . حاصل ضرب آن دو عدد را بدست آورید .

هرگاه مجموع یا تفاضل دو عدد طبیعی ، عددی فرد باشد یکی از آنها زوج و دیگری فرد بوده است. در اینجا چون ذکر شده مجموع دو عدد اول ،پس می نویسیم : (۲۵ = عدد زوج اول + عدد فرد اول) وچون تنها عدد زوج اول عدد ۲ می باشد ؛ پس داریم :

$\boxed{۲۳} + \boxed{۲} = ۲۵ \longrightarrow ۲۳ \times ۲ = ۴۶$

مثال۷: عدد های ۱۵ و ۲۱ دو شمارنده یک عدد هستند . شش شمارنده دیگر این عدد را بنویسید .

$\begin{cases} ۱۵=۳\times۵ \\ ۲۱=۳\times۷ \end{cases}$ **دیگر های شمارنده** $\longrightarrow$ **۱۰۵ و ۳۵ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱**

۵×۷=۳۵ ۳×۵×۷=۱۰۵

توجه کنید که یک شمارنده همه عدد ها است و چون در ساختار ۱۵ و ۲۱ عدد های ۳ و ۵ و ۷ وجود دارد پس در واقع در ساختار عدد اصلی هم باید وجود داشته باشند و در نهایت حاصل ضرب این عدد ها (یعنی ۳ و ۵ و ۷) نیز در ساختار عدد اصلی وجود دارد.

۱. الف- چهار عدد مرکب بنویسید که شمارنده اولی غیر از ۳ و ۵ نداشته باشند .

ب-آیا این عدد ها نسبت به عددی که شمارنده های اول آن ۲ و ۱۱ باشند،اول است؟چرا؟

۲. اگر تعداد عدد های اول کمتر از ۴۷ ، ۱۴ عدد باشد ، تعداد عدد های مرکب چند تا است ؟ چرا ؟

۳ . تفاضل(اختلاف) دو عدد اول ۴۵ است.آن دو عدد را بیابید و مجموع آنها را حساب کنید.

۴ . دو عدد ۲۲ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند. ک.م.م آنها را بدست آورید .

۵ . ب.م.م عدد های زیر را بدست آورید .

(۲۹ و ۲۳)=	(۲۰ و ۴)=	(۱۵ و ۱۶)=
(۱ و ۱۸)=	(۵۵ و۷۷)=	(۴۵ و۱۸)=

۶ . عدد های ۱۴ و ۶ دو شمارنده یک عدد هستند . شش شمارنده دیگر برای این عدد بنویسید .

درس دوم : تعیین اعداد اول

یادآوری چند قاعده بخشپذیری؛

۱.بخشپذیری بر۲: عددی بر۲ بخشپذیر است که رقم یکان آن ۰و۲و۴و۶و۸ باشد.(یا زوج باشد)

۲.بخشپذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخشپذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخشپذیر باشد.

۳.بخشپذیری بر ۵: عددی بر ۵ بخشپذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

برای تعیین عدد های اول از روش غربال استفاده می کنیم .

در این روش ، در واقع عدد های غیر اول را خط می زنیم تا عدد های اول باقی بمانند . به این ترتیب که :

۱.ابتدا عدد یک را خط می زنیم . (زیرا یک نه اول است و نه مرکب)

۲.عدد ۲ ، اول است و همه مضرب های آن بجز خود ۲ ، مرکب هستند . پس : همه مضرب های عدد ۲را ، به جز خود ۲، خط می زنیم .

۳.عدد ۳ ، اول است . تمام مضرب های عدد ۳ را ، به جز خود ۳ خط می زنیم .

و به همین ترتیب خط زدن را تا عدد اولی که مربع (توان دوم) آن بین عدد های نوشته شده نباشد ، ادامه می دهیم .

دقت کنید ؛ در اینجا اولین مضرب مرکب هر عدد اول که برای اولین بار خط می خورد ، توان دوم آن عدد اول است .

مثلا اولین مضرب مرکب ۵ که برای اولین بار خط می خورد ، $۲۵ = ۵^{۲}$ می باشد و در نهایت اعداد خط نخورده باقی مانده ، اول هستند .

مثال۱ : می خواهیم عدد های اول بین ۱ تا ۳۰ را بیابیم.

۱.ابتدا عدد یک خط می خورد.

~~۱~~	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

۲.عدد ۲ اول است پس اولین مضرب مرکب ۲ که خط می خورد ، مربع ۲ یعنی ۴ می باشد و بعد از آن می توان گفت بقیه ی مضرب های مرکب ۲ را به صورت ۲ تا ۲ تا بعد از ۴ خط می زنیم .(یعنی ... و ۸ و ۶ و ۴)

~~۱~~	۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	۹	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	۱۵	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
۲۱	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	۲۵	~~۲۶~~	۲۷	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~

۳.عدد ۳ اول است و مضرب های مرکب آن که هنوز خط نخورده اند را با شروع از ۹(یعنی مربع عدد۳) به صورت ۳تا ۳تا خط می زنیم .

~~۱~~	۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
~~۲۱~~	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	۲۵	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~

۴.خط زدن را تا مربع عدد ۵ ، یعنی ۲۵ ادامه می دهیم. زیرا بعد از آن ، مربع عدد ۷ را داریم که ۴۹ می شود و چون ۴۹ از ۳۰ بزرگتر است پس کار خط زدن عدد های مرکب تمام می شود و عدد های باقیمانده که دورشان خط کشیده شده ، همه اول هستند .

~~۱~~	۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
~~۲۱~~	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~

مثال۲ : عدد های اول بین ۳۰ تا ۵۰ را با روش غربال بنویسید .

راهنمایی : دقت کنید در اینجا ابتدای کار ما عدد یک نیست . در نتیجه قطعا اولین مضرب عدد اول ۲ هم که خط می خورد عدد ۴ نیست. در این سوال ها می توانید از قوانین بخشپذیری برای یافتن اولین مضرب مرکب عدد اول (در اینجا عدد ۲) استفاده کنید.

توجه داشته باشید که در این سوال ها هم برای بعضی از عدد های اول ، اولین مضرب مرکب همان توان دوم عدد اول است.در اینجا اولین مضرب ۲ که خط می خورد عدد ۳۲ می باشد .

۱. مضرب های عدد اول ۲ را خط می زنیم . زیرا : $۲^۲ = ۴ < ۴۹$

۳۱	~~۳۲~~	۳۳	~~۳۴~~	۳۵	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	۳۹	~~۴۰~~
۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	۴۵	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	

در اینجا اولین مضرب ۳ که خط می خورد عدد ۳۳ می باشد .

۲. مضرب های عدد اول ۳ را خط می زنیم . زیرا : $۳^۲ = ۹ < ۴۹$

۳۱	~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	۳۵	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~
۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	۴۹	

در اینجا اولین مضرب ۵ که خط می خورد عدد ۳۵ می باشد .

۳. مضرب های عدد اول۵ را خط می زنیم . زیرا : $۴۹ > ۲۵ = ۵^{۲}$

۳۱ ~~۳۲~~ ~~۳۳~~ ~~۳۴~~ ~~۳۵~~ ~~۳۶~~ ۳۷ ~~۳۸~~ ~~۳۹~~ ~~۴۰~~

۴۱ ~~۴۲~~ ۴۳ ~~۴۴~~ ~~۴۵~~ ~~۴۶~~ ۴۷ ~~۴۸~~ ۴۹

در اینجا اولین مضرب ۷ که خط می خورد همان مربع عدد ۷ یعنی ۴۹ می باشد و چون مربع عدد اول بعدی یعنی ۱۱، برابر ۱۲۱ می شود و از ۴۹ بزرگتر است پس کار خط زدن تمام می شود

۴. مضرب های اول ۷ را خط می زنیم . زیرا : $۴۹ = ۷^{۲}$ **و اعداد باقیمانده همان اعداد اول در فاصله ۳۰ تا ۵۰ می باشند .**

۳۱ ~~۳۲~~ ~~۳۳~~ ~~۳۴~~ ~~۳۵~~ ~~۳۶~~ ۳۷ ~~۳۸~~ ~~۳۹~~ ~~۴۰~~

۴۱ ~~۴۲~~ ۴۳ ~~۴۴~~ ~~۴۵~~ ~~۴۶~~ ۴۷ ~~۴۸~~ ~~۴۹~~

تشخیص اول یا مرکب بودن هر عدد طبیعی ؛

مطابق روش غربال باید مشخص شود عدد مورد نظر مضرب عدد های اول می باشد یا خیر .

برای تشخیص ، باید عدد مورد نظر را بر اعداد اول مانند ... و ۷ و ۵ و ۳ و ۲ تقسیم کرد .

اگر عدد داده شده بر یکی یا بیشتر ، از اعداد اول ، بخشپذیر باشد (باقیمانده صفر شود) ، عدد داده شده مرکب است .

اگر عدد داده شده بر هیچ کدام از اعداد اول بخشپذیر نباشد (باقیمانده صفر نشود) ، عدد داده شده اول است .

برای تعیین تعداد این تقسیم ها ، از عدد مورد نظر جذر تقریبی می گیریم و سپس عدد داده شده را بر اعداد اول کوچکتر از جذر

تقسیم می کنیم .

مثال۳ : می خواهیم مشخص کنیم عدد ۳۷ ، عدد اول است یا مرکب ؟

ابتدا جذر تقریبی عدد ۳۷ را می گیریم ($\sqrt{۳۷} \simeq ۶/۱$ $\quad$ $۶ = \sqrt{۳۶} < \sqrt{۳۷} < \sqrt{۴۹} = ۷$)

پس ۳۷ را بر اعداد اول کوچکتر از ۶ (یعنی ۲ و ۳ و ۵) تقسیم می کنیم .

- یکان ۳۷ فرد است پس بر ۲ بخش پذیر نیست.
- مجموع ارقام ۳۷ عدد ۱۰ است و بر ۳ بخش پذیر نیست.
- یکان ۷ است و بر ۵ بخشپذیر نیست(یکانش صفر یا ۵ نیست.)

چون بر هیچ کدام از اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نیست ، پس: ۳۷ یک عدد اول است.

مثال۴ : مشخص کنید عدد ۹۳ اول است یا مرکب ؟

ابتدا جذر تقریبی عدد ۹۳ را محاسبه می کنیم. $\sqrt{۹۳} \simeq ۹/۶$ $\quad$ $۹ = \sqrt{۸۱} < \sqrt{۹۳} < \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

پس عدد ۹۳ را بر عددهای اول کوچکتر از ۹ (یعنی ۲و۳و۵و۷) تقسیم می کنیم

- یکان ۹۳ فرد است پس بر ۲ بخش پذیر نیست.
- مجموع ارقام ۹۳ عدد ۱۲ است و بر ۳ بخش پذیر است.

عدد ۹۳ بر ۳ بخش پذیر است پس: ۹۳ یک عدد مرکب است

مثال۵ : عددی کمتر از ۱۶۰ و بزرگتر از ۱۳۰ می باشد . برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا خیر ، حداکثر چند تقسیم انجام می دهیم ؟ چرا ؟

در اینجا چون عدد مورد نظر دقیقا مشخص نشده باید عدد بزرگتر در صورت سوال مد نظر قرار گیرد.

$$\sqrt{۱۶۰} \simeq ۱۲/۶ \qquad ۱۲ = \sqrt{۱۴۴} < \sqrt{۱۶۰} < \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$

پس بر اعداد اول کوچکتر از ۱۲ باید تقسیم شود. یعنی بر ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ پس یعنی حداکثر ۵ تقسیم .

توجه کنید که در اینجا فقط تعداد تقسیم ها پرسیده شده و هیچ تقسیمی انجام نمی شود زیرا عدد مورد نظر دقیقا داده نشده است .

مثال۶ : عددهای ۱ تا ۹۰ را نوشته و غربال کرده ایم . با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف-اولین عددی که خط می خورد ؟ عدد یک

ب-اولین مضرب مرکب ۷ که برای اولین بار خط می خورد ؟ عدد ۴۹

پ-عدد ۵۷ با مضرب کدام عدد خط می خورد ؟ عدد ۳

ت-تمام مضرب های ۵ که برای بار اول خط می خورند ، را بنویسید . ۲۵- ۳۵-۵۵-۶۵-۸۵

تمرین

۱. عددهای اول بین ۱ تا ۳۸ را با استفاده از روش غربال بنویسید .

۲. عددهای اول بین ۳۵ تا ۷۰ را با روش غربال مشخص کنید .

۳. با روش تقسیم کردن مشخص کنید که عددهای ۸۳ و ۱۴۳ اول هستند یا مرکب ؟

۴. عددی کمتر از ۱۱۰ و بزرگتر از ۹۳ می باشد . برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا خیر ، حداکثر چند تقسیم باید انجام شود؟چرا؟

۵. میانگین اعداد اول در مجموعه { ۳۲و۳و۱۱و۱و۲۱ } را بدست آورید .

۶. عددهای ۸۰ تا ۱۳۰ را نوشته و غربال کرده ایم . با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف-اولین عددی که خط می خورد ؟

ب-اولین مضرب مرکب ۳ که خط می خورد ؟

پ-تمام مضرب های عدد ۵ که برای اولین بار خط می خورند ؟

ت-عدد ۹۱ با مضرب کدام عدد خط می خورد ؟

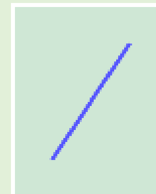
ریاضی

فصل ۳: چند ضلعی

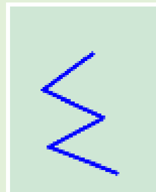
➢ درس اول : چند ضلعی‌ها و تقارن

همانطور که در سالهای قبل آموختیم خطها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد.

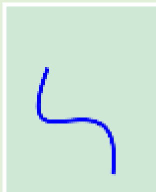
۱- خط راست



۲- خط شکسته

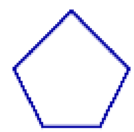


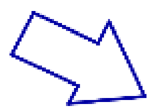
۳- خط خمیده



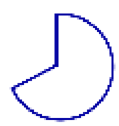
❋ تعریف چندضلعی : به هر خط شکسته بسته، با این شرط که ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند **چندضلعی** می‌گویند.

📖 مثال :

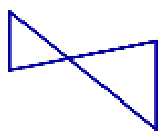




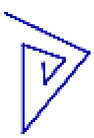
➢ **سوال ۱ :** آیا شکل‌های زیر هر کدام یک چندضلعی هستند؟ چرا؟



(ج)



(ب)



(الف)

پاسخ : خیر

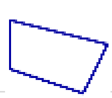
شکل «الف» چندضلعی نیست. زیرا خط شکسته بسته نیست.

شکل «ب» چندضلعی نیست. زیرا ضلعها در جایی غیر از رأسها یکدیگر را قطع می‌کنند.

شکل «ج» چندضلعی نیست. زیرا خط شکسته نیست.

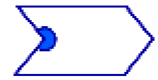
چندضلعی‌ها:

۱- چند ضلعی محدب (کوژ) : چندضلعی که تمام زاویه‌هایش، هرکدام کمتر از 180° باشد چندضلعی محدب یا کوژ نام دارد. مثال : 📖



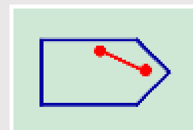
۲– چندضلعی مقعر (کاو): چندضلعی که حداقل یک زاویهٔ بزرگتر از °۱۸۰ داشته باشد چندضلعی مقعر یا کاو نام دارد.

مثال :



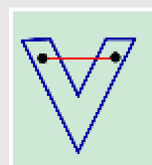
نکته ۱: در چندضلعی‌های محدب هر دو نقطهٔ دلخواه را بهم وصل کنیم تمام خط ایجاد شده در درون شکل قرار می‌گیرد.

مثال :



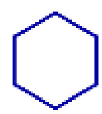
اما در چندضلعی‌های مقعر حداقل دو نقطه وجود دارد که اگر بهم وصل کنیم تمام خط و یا قسمتی از آن در درون شکل قرار نمی‌گیرد.

مثال :

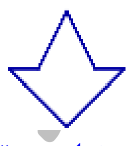


سوال ۲ : یک شش‌ضلعی محدب و یک شش‌ضلعی مقعر رسم کنید.

پاسخ:



شش‌ضلعی محدب

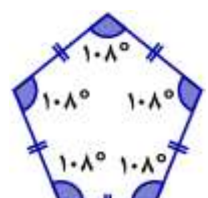


شش‌ضلعی مقعر

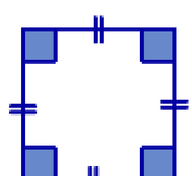
۳– چندضلعی‌های منتظم:

اگر در یک چندضلعی همهٔ زاویه‌ها با هم و همهٔ ضلعها نیز با هم مساوی باشند چندضلعی منتظم است.

مثال :

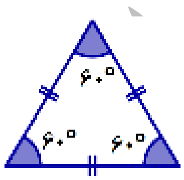


پنج‌ضلعی منتظم



چهارضلعی منتظم

(مربع)



سه‌ضلعی منتظم

(مثلث متساوی‌الاضلاع)

سوال ۳ : کدام گزینه یک شکل منتظم است؟

الف) لوزی ☐ ب) مثلث متساوی‌الساقین ☐ ج) مستطیل ☐ د) مثلث متساوی‌الاضلاع ☐

پاسخ: گزینهٔ «د»

نکته ۲ : در چندضلعی‌های منتظم هر چه تعداد ضلعها بیشتر شود اندازهٔ زاویه‌ها بزرگتر می‌شود.

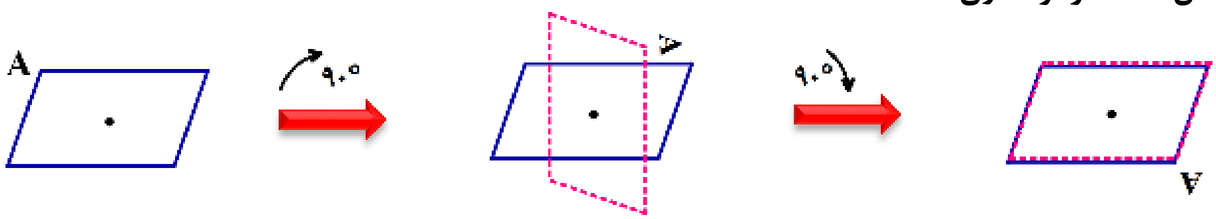
نکته ۳: در چندضلعی‌های منتظم هر چه تعداد ضلعها بیشتر شود شکل بیشتر به دایره شبیه می‌شود.

تقارن :

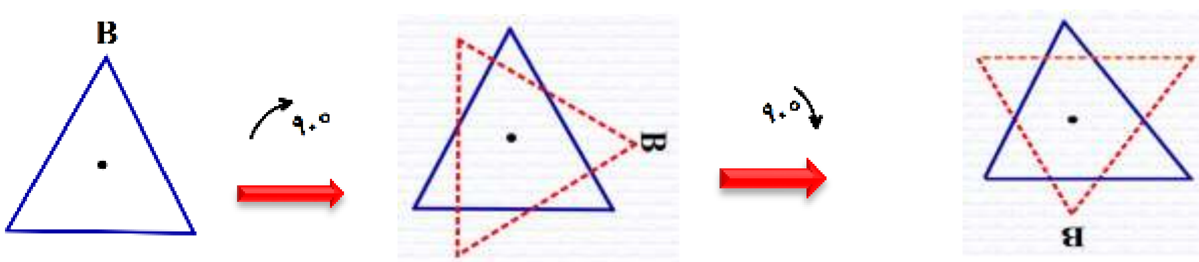
مرکز تقارن: اگر شکلی را حول نقطه‌ای که درون خود شکل قرار دارد، 180° دوران دهید و نتیجهٔ دوران روی خودش منطبق شود، آن نقطه مرکز تقارن شکل است.

مثال : ملاحظه می‌کنید شکل بعد از دوران 180° حول نقطه مشخص شده دوباره بر خودش منطبق شده است.

پس نقطهٔ مشخص شده مرکز تقارن است.



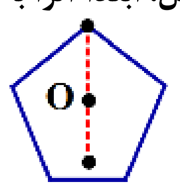
مثال : اما در شکل زیر ملاحظه می‌کنید شکل بعد از دوران 180° حول نقطهٔ مشخص شده دوباره بر خودش منطبق نمی‌شود. پس نقطهٔ مشخص شده مرکز تقارن نیست.



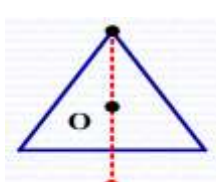
روشی دیگر برای تعیین مرکز تقارن: نقاطی را روی شکل تعیین کنید و قرینهٔ آن نقاط را نسبت به مرکز مشخص شده بیابید. اگر نقطه ایی وجود داشت که قرینه اش روی شکل قرار نگرفت، نتیجه بگیرید مرکز تقارن نیست.

(یادآوری: برای بدست آوردن قرینهٔ هر نقطه از شکل، ابتدا آنرا به نقطهٔ مشخص شده درون شکل وصل می‌کنید و به اندازهٔ خودش و در همان راستا امتداد می‌دهید)

مثال :

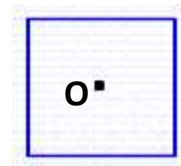


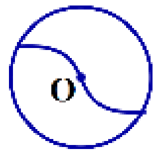
نقطهٔ O مرکز تقارن نیست

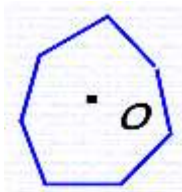


نقطهٔ O مرکز تقارن نیست

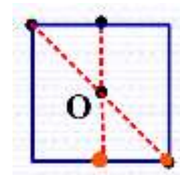
➢ **سوال ۴ :** با استفاده از همین روش تعیین کنید در کدامیک از شکلهای زیر نقطهٔ O مرکز تقارن است.



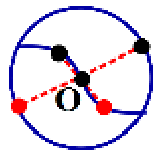




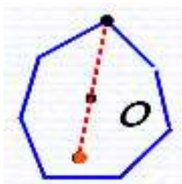
پاسخ:



نقطهٔ O مرکز تقارن است



نقطهٔ O مرکز تقارن است



نقطهٔ O مرکز تقارن نیست

نکته ۴ : به طور کلی در چندضلعی‌های منتظم که تعداد ضلعها زوج باشد مرکز تقارن وجود دارد.

مثال: مربع و ده‌ضلعی منتظم

نکته ۵ : به طور کلی در چندضلعی‌های منتظم که تعداد ضلعها فرد باشد مرکز تقارن وجود ندارد.

مثال: پنج‌ضلعی منتظم و هفت‌ضلعی منتظم

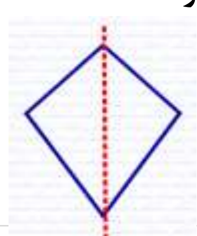
➢ **سوال ۵ :** کدامیک از شکلهای زیر مرکز تقارن دارد؟

الف) نیم‌دایره ☐ ب) مثلث متساوی‌الاضلاع ☐ ج) نه‌ضلعی منتظم ☐ د) متوازی‌الاضلاع ☐

پاسخ: گزینه «د»

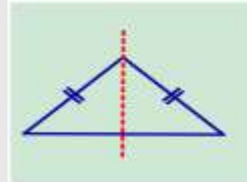
محور تقارن: خطی که شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند به طوری که اگر شکل را از روی آن خط تا بزنیم دو قسمت بر هم منطبق می‌شوند، و هر قسمت همانند آینه‌ای است برای قسمت دیگر.

مثال :



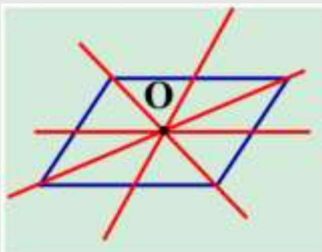
نکته ۶ : ممکن است شکلی مرکز تقارن نداشته باشد ولی محور تقارن داشته باشد.

مثال : مثلث متساوی‌الساقین



نکته ۷: ممکن است شکلی مرکز تقارن داشته باشد ولی محور تقارن نداشته باشد.

مثال : متوازی‌الاضلاع



مثال: هفت‌ضلعی منتظم هفت محور تقارن دارد. (مرکز تقارن ندارد) و ده‌ضلعی منتظم ده محور تقارن دارد. (مرکز تقارن دارد)

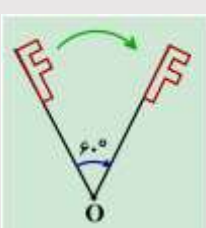
سؤال ۶ : نسبت تعداد محور تقارن یک هشت‌ضلعی منتظم به یک شش‌ضلعی منتظم برابر است با ....

پاسخ : $\dfrac{\text{تعداد محورتقارن هشت ضلعی}}{\text{تعداد محور تقارن شش ضلعی}} = \dfrac{۸}{۶} = \dfrac{۴}{۳}$

دوران: اگر شکلی را روی صفحه حول یک نقطهٔ ثابت (مرکز دوران) با زاویه‌ای مشخص بچرخانیم تصویر حاصل دوران یافتهٔ شکل می‌باشد.

نکته ۹ : در دوران ۱۸۰° و ۳۶۰° نیاز به مشخص کردن جهت دوران نیست ولی اگر زاویهٔ دوران ۱۸۰° و ۳۶۰° نباشد باید جهت دورا ن مشخص شود.

نکته ۱۰ :   در هر دوران تصویر بدست آمده (دوران یافته) هم‌اندازه و هم‌جهت با شکل است.

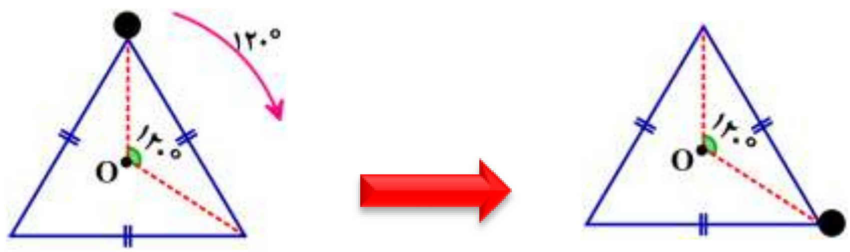


دوران ۶۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

تقارن چرخشی (دورانی) در چندضلعی‌های منتظم:

چندضلعی‌های منتظم را می‌توان با دورانی حداقل کمتر از ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مرکز دوران بر خودشان منطبق کرد.

مثال : اگر سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) را حول مرکز O با زاویهٔ دوران ۱۲۰° دوران دهیم بر خودش منطبق می‌شود.



نکته ۱۱ : حداقل زاویهٔ دوران در تقارن چرخشیِ چندضلعی‌های منتظم را می‌توان از دستور زیر بدست آورد.

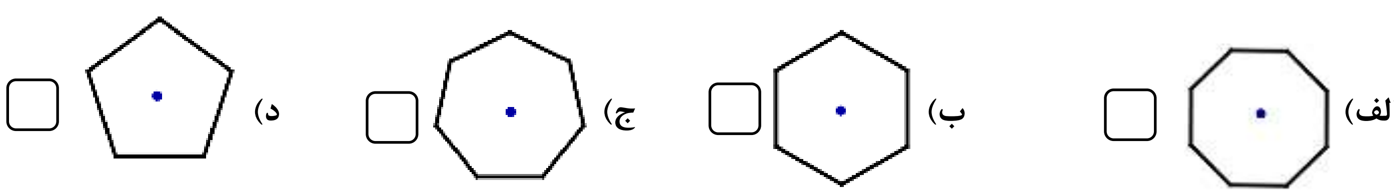
$$\hat{\alpha} = ۳۶۰^\circ \div \text{تعداد ضلع} \qquad (۰ < \hat{\alpha} \leq ۳۶۰)$$

سایر دورانها مضربهای $\hat{\alpha}$ هستند.

مثال : سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) با چه دورانهایی حول نقطهٔ O بر خودش منطبق می‌شود؟

$$۳۶۰^\circ \div ۳ = ۱۲۰^\circ \qquad \hat{\alpha} = ۱۲۰^\circ \text{و} ۲۴۰^\circ \text{و} ۳۶۰^\circ$$

سؤال ۷ : در کدامیک از گزینه‌های زیر چندضلعی منتظم با دوران ۹۰° حول نقطهٔ مشخص شده در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بر خودش منطبق می‌شود؟

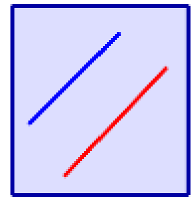


پاسخ: گزینه «الف» ۴۵×۲=۹۰ و ۳۶۰÷۸=۴۵ .

هشت‌ضلعی منتظم با دورانهای ۳۶۰° و ۳۱۵° و ۲۷۰° و ۲۲۵° و ۱۸۰° و ۱۳۵° و ۹۰ و ۴۵° حول نقطهٔ مشخص شده بر خودش منطبق می‌شود.

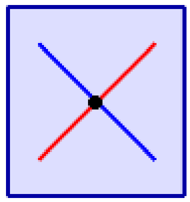
➢ درس دوم : توازی و تعامد

دو خط متمایز در صفحه نسبت به هم دو حالت دارند.



دو خط موازیند

دو خط هیچ نقطه مشترکی ندارند

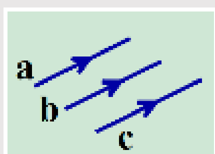


دو خط متقاطع‌اند

دو خط یک نقطهٔ مشترک دارند

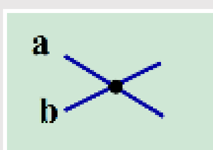
نکته ۱۲ : برای اینکه خطوط موازی را نشان دهیم روی آنها علامتهای یکسان (<) یا (<<) یا (<<<) یا ... قرار می‌دهیم و بین اسامی آنها از علامت (||) استفاده می‌کنیم.

$a \parallel b \parallel c$



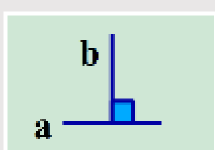
نکته ۱۳ : اگر خطوط داده شده موازی نباشند و متقاطع باشند بین اسامی آنها از علامت ($\nparallel$) استفاده می‌کنیم

$a \nparallel b$



نکته ۱۴ : اگر خطوط متقاطع بر هم عمود باشند بین اسامی آنها از علامت ($\perp$) استفاده می‌کنیم.

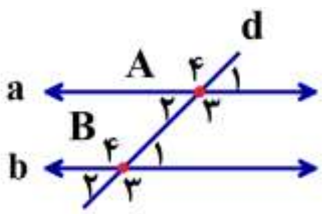
$a \perp b$



✵ دو خط موازی :

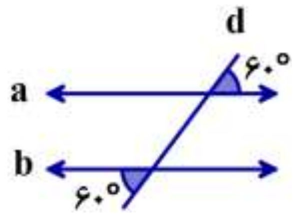
در دورهٔ ابتدایی آموختید که دو خط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند ممکن است این پرسش در ذهن شما بوجود بیاید که :برای تشخیص موازی بودن دو خط باید تا کجا آن دو را ادامه دهیم که مطمئن شویم موازی هستند؟ و اما در ادامه روشی را معرفی می‌کنیم که برای تشخیص موازی بودن دو خط مفید است.

تعریف دیگری برای دو خط موازی : هرگاه خطی مانند (d) دو خط a و b را قطع کند و زاویه‌های مساوی ایجادکند نتیجه می‌گیریم دو خط a و b موازی هستند.



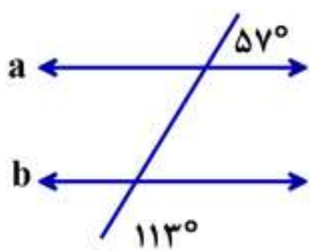
$$\begin{cases} \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ & \text{(زاویه‌های تند مساویند)} \\ \widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۴ = \widehat{B}_۳ = \widehat{B}_۴ & \text{(زاویه‌های باز مساویند)} \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

مثال : در شکل مقابل خط d دو خط a و b را طوری قطع کرده که زاویه‌های مساوی ایجاد کرده است پس دو خط a و b موازیند :

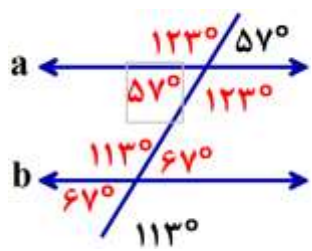


$$\begin{cases} \text{زاویه های تند} = ۶۰^\circ \\ \text{زاویه های باز} = ۱۲۰^\circ \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

سوال ۱ : با توجه به شکل مقابل آیا دو خط a و b موازیند؟

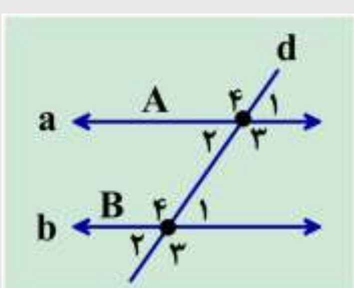


پاسخ: خیر – زیرا زاویه‌های تند با هم مساوی نیستند و زاویه‌های باز نیز با هم مساوی نیستند.



$$\Rightarrow a \nparallel b$$

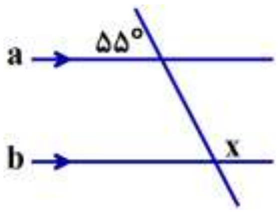
نکته ۱۵ : اگر خط مورّبی دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.



$$(a \parallel b \text{ و مورّب } d) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ & \text{(زاویه‌های تند مساویند)} \\ \widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۴ = \widehat{B}_۳ = \widehat{B}_۴ & \text{(زاویه‌های باز مساویند)} \end{cases}$$

و هر زاویهٔ باز با هر زاویهٔ تند مکمل است. $\widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۳ = ۱۸۰^\circ$

➢**سؤال ۲ :** دو خط a و b در شکل مقابل موازیند. اندازهٔ زاویهٔ خواسته شده را بدست آورید.

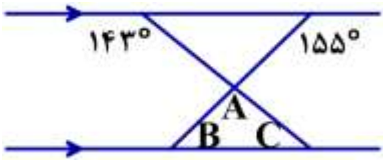


$\hat{x}$=...

پاسخ: زاویهٔ $\hat{x}$ زاویه‌ای باز است و مکمل ۵۵° پس: $\hat{x}=۱۸۰^\circ - ۵۵^\circ=۱۲۵^\circ$

$\hat{x}=۱۲۵^\circ$

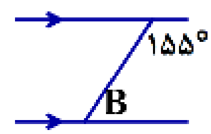
➢**سؤال ۳ :** با توجه به دو خط موازی اندازهٔ زاویه‌های خواسته شده را بدست آورید.



$\hat{A} = \cdots$ و $\hat{B} = \cdots$ و $\hat{C} = \cdots$

پاسخ : $\hat{C} = ۳۷^\circ$ و $\hat{B}=۲۵^\circ$ و $\hat{A}=۱۱۸^\circ$

اگر شکل را به دو قسمت زیر تقسیم کنیم :



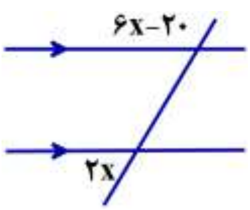
در این قسمت $\hat{B}$ مکمل زاویهٔ ۱۵۵° است : $\hat{B}=۱۸۰^\circ - ۱۵۵^\circ=۲۵^\circ$

در این قسمت نیز $\hat{C}$ مکمل زاویهٔ ۱۴۳° است. $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۱۴۳^\circ=۳۷^\circ$

برای بدست آوردن $\hat{A}$ با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، داریم :

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ - (۳۷^\circ+۲۵^\circ)=۱۸۰^\circ - ۶۲^\circ=۱۱۸^\circ$$

➢**سؤال ۴ :** شکل مقابل با توجه به موازی بودن دو خط مقدار x را تعیین کنید.



پاسخ : $x = ۲۵$

$۲x$ اندازهٔ زاویهٔ تند و $۶x - ۲۰$ اندازهٔ باز است دو زاویه مکمل یکدیگر هستند یعنی :

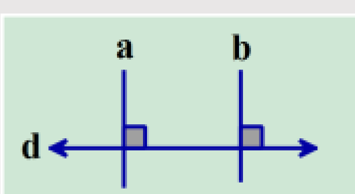
$$۶x - ۲۰+۲x = ۱۸۰^\circ$$

سپس با کمک معادله مقدار x را تعیین می‌کنیم.

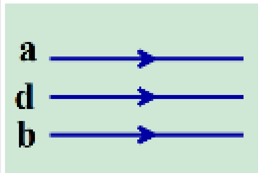
$$۸x - ۲۰ = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۸x = ۱۸۰+۲۰ = ۲۰۰ \rightarrow x = \frac{۲۰۰}{۸} = ۲۵ \rightarrow \quad x = ۲۵$$

نکته ۱۶ (نکاتی در مورد خطوط موازی) :

❶ دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند. $\begin{cases} a \perp d \\ b \perp d \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

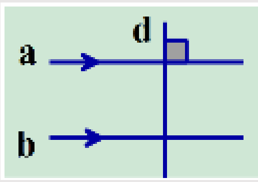


❷ دو خط موازی با یک خط، با هم موازیند.



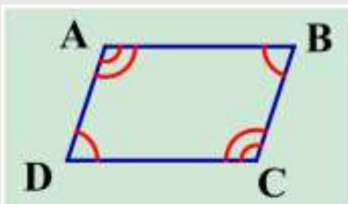
$$\begin{cases} a \parallel d \\ b \parallel d \end{cases} \Rightarrow \ a \parallel b$$

❸ اگر خطّی بر یکی از دو خطّ موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود خواهد بود.



$$\begin{cases} d \perp a \\ a \parallel b \end{cases} \Rightarrow \ d \perp b$$

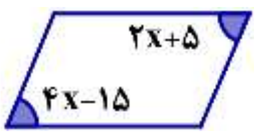
❹ در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم موازیند با کمک روابط موجود بین خطوط موازی و مورّب که در این درس آموختید، می‌توان نتیجه گرفت در هر متوازی الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.



$$\hat{A} = \hat{C} \qquad \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \qquad \hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{D} = \hat{B} \qquad \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \qquad \hat{D} + \hat{A} = ۱۸۰^\circ$$

➢ **سوال ۵ :** با توجه به اینکه شکل مقابل متوازی‌الاضلاع ست، مقدار x را تعیین کنید.



پاسخ : $x = ۱۰$

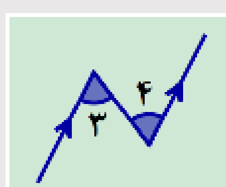
در متوازی الاضلاع دو زاویه روبه‌رو با هم مساوی هستند. $۲\,x + ۵ = ۴\,x - ۱۵$

به کمک حل معادله، مقدار x را تعیین می‌کنیم :

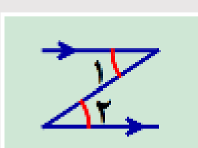
$$۲\,x - ۴\,x = -۱۵ - ۵ \longrightarrow -۲\,x = -۲۰ \longrightarrow x = \frac{-۲۰}{-۲} = ۱۰ \quad \longrightarrow \quad x = ۱۰$$

نکته ۱۷ : هر جا خطوط موازی را به صورت حرف « Z » و یا حرف «N » دیدیم و یا برعکس آنها، زاویه‌های تند آنها با هم مساویند.

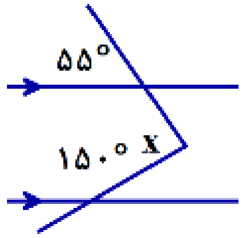
مثـال :



$\hat{۳} = \hat{۴}$



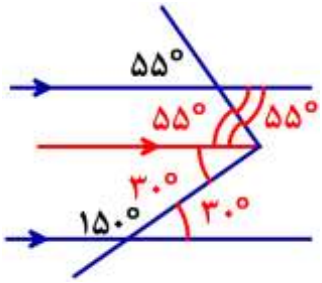
$\hat{۱} = \hat{۲}$



➢ سؤال ۶ : اندازهٔ زاویه x چند درجه است؟

۱) ۵۵° ☐ ۲) ۳۰° ☐ ۳) ۹۵° ☐ ۴) ۸۵° ☐

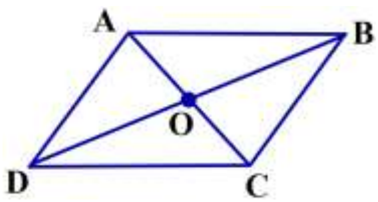
پاسخ : می توان با رسم خطی موازی دو خط شکل را به صورت مقابل تقسیم میکنیم ،



جواب:گزینه ۴

$$\hat{x} = ۵۵^\circ + ۳۰^\circ = ۸۵^\circ$$

➢ درس سوم : چهارضلعی



متوازی‌الاضلاع:

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌رو دو به دو موازی باشند.

با استفاده از کاغذ پوستی و دوران ۱۸۰° حول مرکز تقارنش (نقطهٔO) مشاهده می‌کنید که اضلاع روبه‌رو، روی هم قرار می‌گیرند (پس با هم برابرند) و زاویه‌های روبه‌رو نیز روی هم قرار می‌گیرند (پس با هم برابرند). با استفاده از دوران و انطباق می‌توان ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را به صورت زیر نوشت:

۱- در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با هم مساویند. $AB = DC$ و $AD = BC$

۲- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو با هم مساویند. $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

۳- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند.

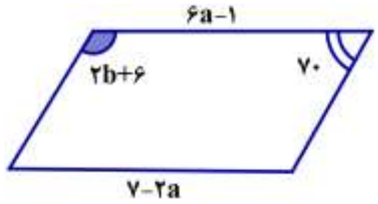
$$\hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \quad و \quad \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \quad و \quad \hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \quad و \quad \hat{D} + \hat{A} = ۱۸۰^\circ$$

۴- در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. $AO = OC$ و $OB = OD$

۵- در هر متوازی‌الاضلاع، محل برخورد قطرها، مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع است (نقطهٔO)

(یادآوری: متوازی‌الاضلاع، محور تقارن ندارد)

➢ سؤال ۱ : با توجه به متوازی‌الاضلاع مقابل مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



$$a = \cdots$$

$$b = \cdots$$

پاسخ: $b = ۵۲$ و $a = ۱$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند. پس $۶\,a - ۱ = ۷ - ۲\,a$ به کمک حل معادله مقدار a را تعیین می‌کنیم:

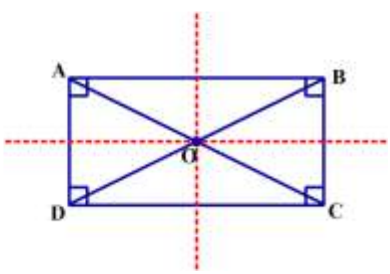
$$۶\,a + ۲\,a = ۷ + ۱ \rightarrow ۸\,a = ۸ \rightarrow a = \frac{۸}{۸} = ۱ \rightarrow a = ۱$$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند. پس: $۲\,b + ۶ + ۷۰ = ۱۸۰$ به کمک حل معادله مقدارb را تعیین می‌کنیم:

$$۲\,b = ۱۸۰ - ۷۶ = ۱۰۴ \rightarrow ۲\,b = ۱۰۴ \rightarrow b = \frac{۱۰۴}{۲} = ۵۲ \rightarrow b = ۵۲$$

➢ **مستطیل:**

اگر در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌ها قائمه(۹۰°) باشند، مستطیل بوجود می‌آید. بنابراین مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد.



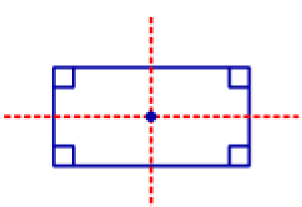
اگر مستطیلی را روی یکی از خط‌های تقارنش و سپس روی خط تقارن دیگرش تا کنید می‌توان ویژگی‌های مستطیل را به صورت زیر نوشت:

۱- در هر مستطیل، همهٔ زاویه‌ها با هم برابرند. $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = ۹۰^\circ$

۲- در هر مستطیل، ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند. $AD = BC$ و $AB = DC$

۳- در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند. $AC = BD$

۴- در هر مستطیل، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. $OA = OC = OB = OD$



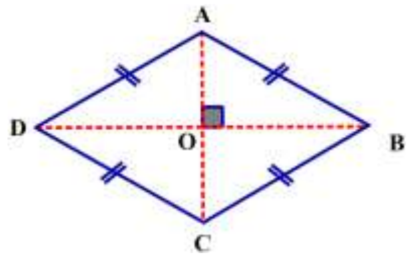
(یادآوری: هر مستطیل دو محور تقارن دارد:

۱- خطی که از وسط طول‌ها می‌گذرد. ۲- خطی که از وسط عرض‌ها می‌گذرد)

❋ تذکر: قطرها در مستطیل محور تقارن نیستند.

❋ تذکر: در مستطیل قطرها بر هم عمود نیستند.

➢ لوزی:



اگر در متوازی‌الاضلاع، همهٔ ضلع‌ها برابر باشند. لوزی به وجود می‌آید.

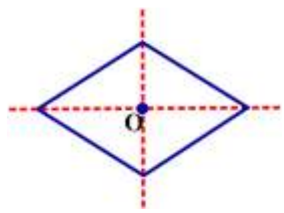
بنابراین لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که ضلع‌های برابر دارد.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

با توجه به اینکه لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است، علاوه بر همهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی دیگری نیز دارد.

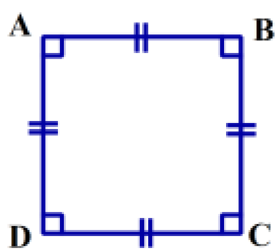
«در هر لوزی قطرها بر هم عمودند $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ »

(یادآوری: در هر لوزی قطرها محور تقارن هستند و محل برخورد قطرها، مرکز تقارن (نقطهٔO) لوزی است.



➢ مربع:

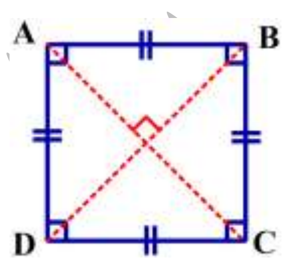
اگر در متوازی‌الاضلاع، همه ضلعها هم‌اندازه و هم‌زاویه‌ها قائمه باشند، مربع به وجود می‌آید. بنابراین مربع، متوازی‌الاضلاعی است که هم ضلع‌های مساوی و هم زاویه‌های قائمه دارد.



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = ۹۰^\circ$$

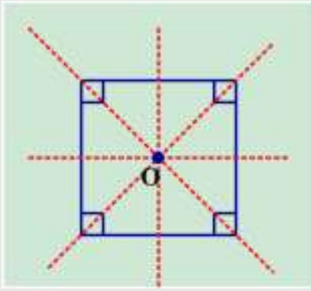
در مربع تمام ویژگی‌های یک متوازی‌الاضلاع وجود دارد علاوه بر همهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی‌های زیر را هم دارد:



۱- در هر مربع قطرها با هم برابرند. $AC = BD$

۲- در هر مربع قطرها بر هم عمودند. $AC \perp BD$

نکته ۱ : هر مربع چهار محور تقارن دارد:



۱- دو قطر

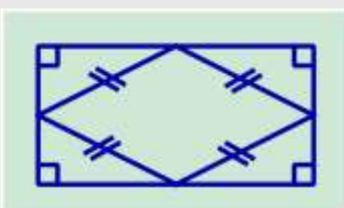
۲- خطوطی که از وسط هر دو ضلع روبه‌رو می‌گذرند.

محل برخورد خط‌های تقارن، مرکز تقارن (نقطهٔ O) مربع است.

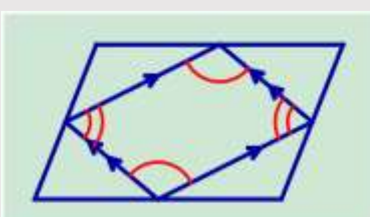
نکته۲: هر مربع هم نوعی متوازی‌الاضلاع، هم نوعی لوزی و هم نوعی مستطیل است. زیرا ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، لوزی و مستطیل را دارد.

نکته۳: اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده باز هم مربع خواهد بود. (با استفاده از خط‌های تقارن در مربع و تا زدن مربع روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)

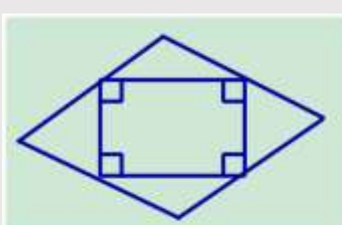
نکته۴: اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده یک لوزی خواهد بود. (با استفاده از خط‌های تقارن در مستطیل و تا زدن مستطیل روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)



نکته۵: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

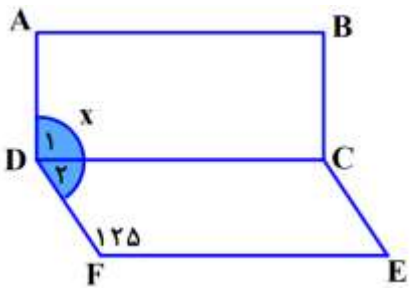


نکته۶: اگر وسط‌های اضلاع یک لوزی را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک مستطیل خواهد بود.



➢ سؤال ۲ : در شکل مقابل،ABCD مستطیل و DCEF متوازی‌الاضلاع است. مقدار زاویهٔ $\hat{x}$ چند درجه است؟

الف) ۱۵۵° ☐ ب) ۱۴۵° ☐



پاسخ: (ب) ۱۴۵°

$$\hat{x} = \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۹۰^\circ + ۵۵^\circ = ۱۴۵^\circ$$

$$\hat{D}_۱ = ۹۰^\circ \quad \text{و} \quad \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۱۲۵^\circ = ۵۵^\circ$$

➢ سؤال ۳ : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر وسطهای اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل .... خواهد بود.

ب) در متوازی‌الاضلاع، محل برخورد قطرها، .... شکل است.

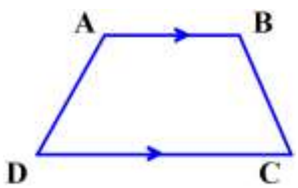
ج) لوزی که دو قطر مساوی دارد، .... نام دارد.

د) متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ قائمه دارد .... نام دارد.

پاسخ:

الف) لوزی ب) مرکز تقارن ج) مربع د) مستطیل

➢ ذوزنقه :



چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد، ذوزنقه نام دارد. $(AB \parallel DC)$

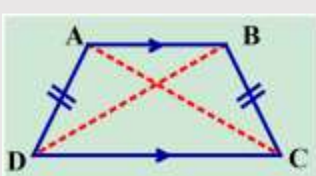
به دو ضلع موازی قاعده و به دو ضلع دیگر که با هم موازی نیستند ساق می‌گویند.

❋ تذکر: در ذوزنقه زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی نیستند و قطرها یکدیگر را نصف نمی‌کنند.

نکته ۷ : در هر ذوزنقه دو زاویهٔ مجاور به هر ساق مکملند. $\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$

نکته ۸ : اگر در ذوزنقه دو ساق مساوی باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین خواهد بود.

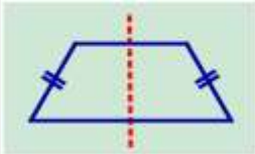
پس دو زاویهٔ مجاور به هر قاعده با هم برابرند



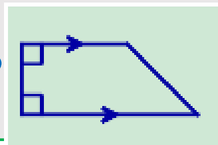
$\hat{D} = \hat{C}$ و $\hat{A} = \hat{B}$ و $\overline{AD} = \overline{BC}$

و دو قطر نیز با هم برابرند. $AC = BD$

نکته ۴ : ذوزنقه متساوی الساقین یک خط تقارن دارد

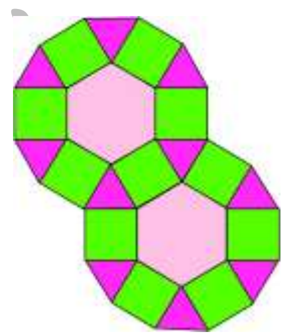


نکته ۵ : اگر در ذوزنقه یکی از ساقها بر دو قاعده عمود باشد ذوزنقه قائم‌الزاویه خواهد بود.

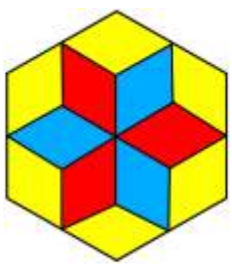


➢ درس چهارم : زاویه‌های داخلی

کاشی‌کاری: گاهی برای پوشاندن یک سطح از یک یا چند نوع کاشی استفاده می‌کنند به صورتی که کاشی‌ها روی هم قرار نگیرند و نیز بین آنها فضای خالی نباشد. مانند شکل‌های زیر:

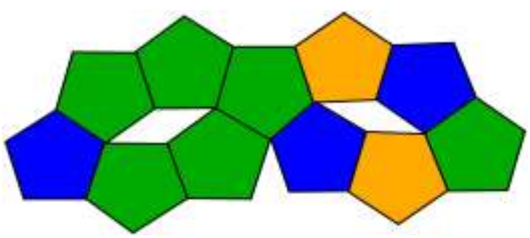


کاشی‌کاری با استفاده از سه نوع کاشی



کاشی‌کاری با استفاده از یک نوع

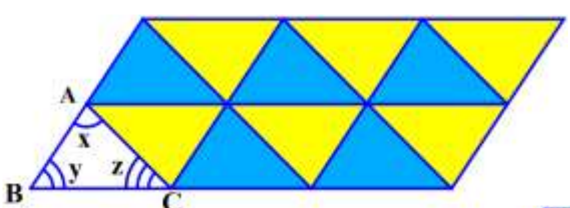
➢ **سؤال ۱ : به شکل زیر توجه کنید. چرا کاشی‌کاری با یک نوع کاشی انجام نمی‌شود؟**



پاسخ:

زیرا بین کاشی‌ها فضای خالی وجود دارد.

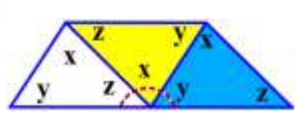
سطح زیر با مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث ABC کاشی‌کاری شده است.



مثلث آبی انتقال یافته مثلثABC است.

مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

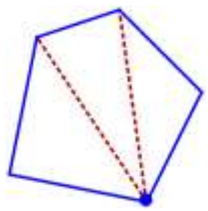
اگر سه مثلث هم‌نهشت را دوباره رسم کنیم،



ملاحظه می‌کنید که سه زاویهٔ «x ، y، z» که زاویه‌های یک مثلث هستند در کنار هم تشکیل زاویهٔ نیم صفحه را می‌دهند پس : « مجموع زاویه‌های یک مثلث °۱۸۰ است» $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$

مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی:

منظور از زاویه‌های داخلی یک چندضلعی، زاویه هایی است که درون چندضلعی قرار دارد و ضلع‌های زاویه، ضلعهای چندضلعی است. برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی با رسم تعدادی از قطرهای چندضلعی درون آن تعدادی مثلث ایجاد می‌کنیم و با توجه به اینکه: «مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰° است. مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی را به دست می آوریم.



۳×۱۸۰=۵۴۰

※ تذکر: دقت کنید قطرهایی رسم کنید که یکدیگر را قطع نکنند. (بجز در رأس)

برای رسم قطرها یک رأس را در نظر می‌گیریم و به رأسهای مقابل وصل می‌کنیم.

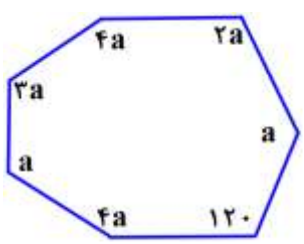
با دقت در مثال بالا متوجه می‌شوید که تعداد مثلثهای ایجاد شده در هر چندضلعی ۲ تا از تعداد ضلع‌ها کمتر است.

مثلاً مجموع زاویه‌های داخلی یک شش‌ضلعی برابر است با: (۶-۲)×۱۸۰°= ۴×۱۸۰°=۷۲۰°

نکته ۱ : برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

مجموع زاویه‌های داخلی هر چندضلعی = تعداد مثلثها ×۱۸۰ = (تعداد ضلع‌ها –۲) ×۱۸۰

سؤال ۲ : در شکل مقابل مقدار a را بدست آورید.



پاسخ: a = ۵۲

مجموع زاویه‌های داخلی هفت ضلعی = ۵×۱۸۰ = ۹۰۰

۲ a + a + ۱۲۰ + ۴ a + a + ۳ a + ۴ a = ۹۰۰

به کمک حل معادله مقدار a را بدست می‌آوریم. ۱۵ a + ۱۲۰ = ۹۰۰

۱۵ a = ۹۰۰-۱۲۰=۷۸۰ → a = $\frac{۷۸۰}{۱۵}$ = ۵۲ → a = ۵۲

محاسبهٔ اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک چندضلعی منتظم:

ابتدا مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی منتظم را بدست می‌آوریم و چون در شکل‌های منتظم زاویه‌ها با هم برابرند، مجموع زاویه‌های داخلی را بر تعداد زاویه‌ها تقسیم می‌کنیم تا اندازهٔ هر زاویه بدست آید.

➢ **سؤال ۳ : اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت‌ضلعی منتظم را بدست آورید.**

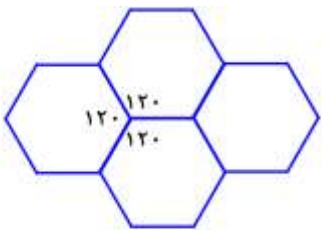
پاسخ : ۱۳۵ ، مجموع زاویه‌های داخلی $۱۰۸۰ = ۱۸۰ \times (۸ - ۲)$ ← اندازهٔ هر زاویه $۱۰۸۰ \div ۸ = ۱۳۵$

نکته ۲ : اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-۲)\times۱۸۰}{n}$

➢ **سؤال ۴ : آیا با کاشی‌هایی به شکل شش‌ضلعی منتظم می‌توان به تنهایی کاشی‌کاری کرد؟پاسخ: بله**

در کاشی‌کاری با شش‌ضلعی منتظم به تنهایی، هیچ فضای خالی ایجاد نمی‌شود.

ابتدا اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم را محاسبه می‌کنیم. شش‌ضلعی‌های منتظم وقتی کنار هم قرار می‌گیرند در هر گوشه



$$\frac{(۶-۲)\times ۱۸۰}{۶} = \frac{۴\times۱۸۰}{۶} = ۱۲۰$$

سه تا زاویهٔ ۱۲۰° داریم که می‌شود $۳\times۱۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

نکته ۳ : اگر بخواهیم فقط با استفاده از یک نوع شکل منتظم کاشی‌کاری کنیم، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی آن باید شمارندهٔ ۳۶۰ باشد. (به عبارتی ۳۶۰° باید بر اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی شکل منتظم بخش‌پذیر باشد)

➢ **سؤال ۵ : آیا با کاشی‌هایی به شکل پنج‌ضلعی منتظم، می‌توان به تنهایی کاشی‌کاری کرد؟**

پاسخ: خیر

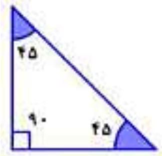
اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی $\frac{(۵-۲)\times ۱۸۰}{۵} = \frac{۳\times۱۸۰}{۵} = ۱۰۸$ (۳۶۰ بر ۱۰۸ بخش‌پذیر نیست.)

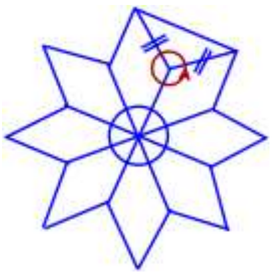
➢ **سؤال ۶ :** شکل روبه‌رو با یک نوع مثلث و یک نوع لوزی کاشی‌کاری شده است.

اندازهٔ زاویه‌های مثلث و لوزی را محاسبه کنید.

پاسخ: در لوزی:

و در مثلث





اگر به مرکز طرح کاشی‌کاری دقت کنید، ۸ تا زاویهٔ تند لوزی‌ها که با هم مساوی‌اند

در کنار هم تشکیل زاویهٔ ۳۶۰ درجه را می‌دهند.

اندازهٔ زاویهٔ تند در هر لوزی $۳۶۰ \div ۸ = ۴۵$

اندازهٔ زاویهٔ باز در هر لوزی ۱۳۵ = ۴۵ - ۱۸۰ می‌باشد. سپس به گوشه‌ای دقت کنید که از دو زاویهٔ باز لوزی و یک زاویهٔ مثلث تشکیل شده است. $۲\times۱۳۵ = ۲۷۰$

اندازهٔ یکی از زاویه‌های مثلث $۳۶۰ - ۲۷۰ = ۹۰$

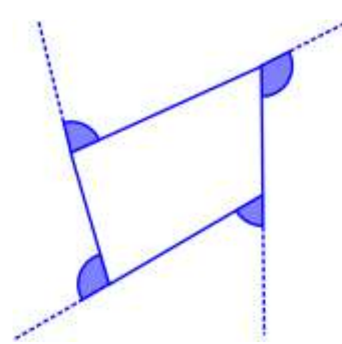
درمثلث قائم الزاویه ایی که دو ساق برابر دارد اندازهٔ هر زاویهٔ تند برابرست با: $۱۸۰ - ۹۰ = ۹۰$ $\quad ۹۰ \div ۲ = ۴۵$

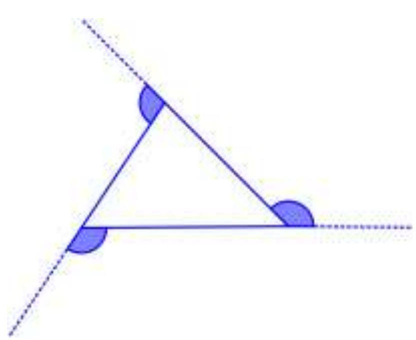
نکته ۴ : برای محاسبه مجموع زاویه های داخلی در nضلعی‌های مقعر (کاو) نیز از رابطه $(n - ۲) \times ۱۸۰^{\circ}$ استفاده می‌کنیم.

➢ درس پنجم : زاویه‌های خارجی

در چندضلعی‌های محدب، زاویه‌ای که در هر رأس بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، زاویهٔ خارجی آن رأس نامیده می‌شود.

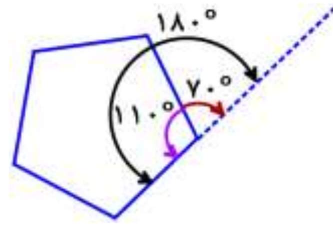
📖 مثال:

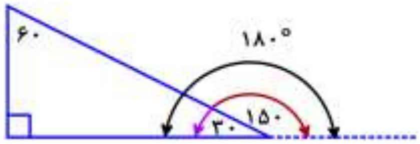




نکته۱: در چندضلعی‌های محدب مجموع هر زاویهٔ داخلی با زاویهٔ خارجی متناظرش برابر است با °۱۸۰.

📖 **مثال:**



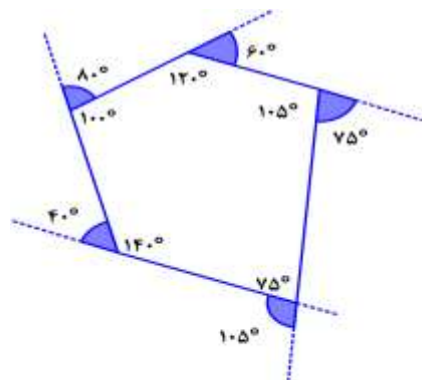


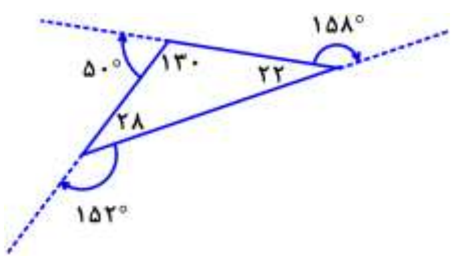
۱۱۰° + ۷۰° = ۱۸۰°

۳۰° + ۱۵۰° = ۱۸۰°

نکته۲: در چندضلعی‌های محدب، مجموع زاویه‌های خارجی °۳۶۰ است.

📖 **مثال:**

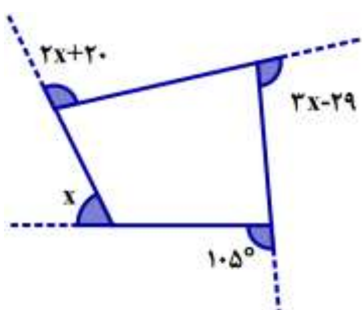




۱۰۵° + ۴۰° + ۸۰° + ۶۰° + ۷۵° = ۳۶۰°

۱۵۲° + ۱۵۸° + ۵۰° = ۳۶۰°

➤ **سؤال ۱ : در شکل مقابل، اندازهٔ x چند درجه است؟**



پاسخ: $x = ۴۴^\circ$

مجموع زاویه‌های خارجی در چندضلعی‌های محدب برابر است با ۳۶۰ درجه

$$(۲x + ۲۰) + (۳x - ۲۹) + ۱۰۵ + x = ۳۶۰$$

با حل معادله مقدار x را بدست می‌آوریم.

$$۶x + ۹۶ = ۳۶۰ \rightarrow ۶x = ۳۶۰ - ۹۶ = ۲۶۴ \rightarrow x = \frac{۲۶۴}{۶} = ۴۴ \rightarrow \quad x = ۴۴$$

نکته۳: در چندضلعی‌های منتظم زاویه‌های خارجی برابرند، بنابراین برای بدست آوردن اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی می‌توان ۳۶۰° را بر تعداد زاویه‌های خارجی تقسیم کرد.

اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در nضلعی‌های منتظم $= ۳۶۰ \div n$

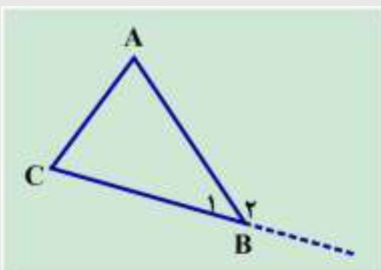
مثال: اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در ده‌ضلعی منتظم برابر است با: $۳۶۰ \div ۱۰ = ۳۶$

سؤال ۲ : اگر اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی nضلعی منتظمی ۱۵۶ درجه باشد، تعداد اضلاع چندضلعی را بیابید.

پاسخ: ۱۵ضلعی منتظم ،می‌دانیم مجموع هر زاویهٔ خارجی با زاویهٔ داخلی متناظرش برابر است با ۱۸۰° .

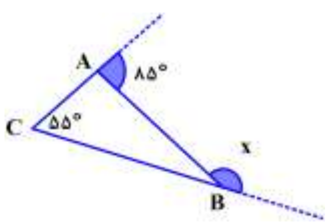
پس: اندازهٔ هر زاویهٔ خارجیn ضلعی منتظم $۱۸۰ - ۱۵۶ = ۲۴^\circ$. با توجه به اینکه می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی باید ۳۶۰° شود. بنابراینn ضلعی مورد نظر سؤال ۱۵ضلعی منتظم است $۳۶۰ \div ۲۴ = ۱۵$.

نکته ۴ : در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش (دو زاویهٔ داخلی که کنارش قرار ندارند) برابر است.



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{A} + \hat{C}$$

سؤال ۳ : در شکل مقابل زاویهٔ x چند درجه است؟

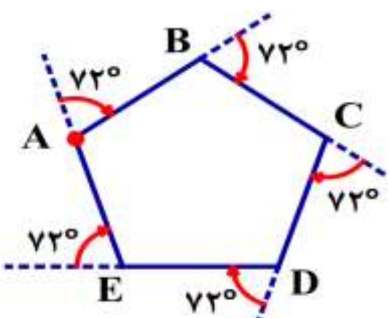


پاسخ: $\hat{x} = ۱۵۰^\circ$،ابتدا زاویهٔ داخلی **A** را بدست می‌آوریم: $۱۸۰ - ۸۵ = ۹۵^\circ$

حال با استفاده از نکتهٔ قبل زاویهٔ **x** را تعیین می‌کنیم $\hat{x} = ۹۵ + ۵۵ = ۱۵۰^\circ$

نکته ۵ : هرگاه روی محیط یک چندضلعی محدب حرکت کنیم به اندازهٔ زاویه‌های خارجی شکل می‌چرخیم، یعنی(۳۶۰°).

مثال: لاک‌پشتی برای پیمودن محیط ۵ضلعی منتظم از نقطهٔA شروع می‌کند وقتی می‌خواهد از روی ضلع AB روی ضلع BC قرار بگیرد به اندازهٔ زاویهٔ خارجی $\hat{B}$ می‌چرخد و بعد به اندازهٔ زاویهٔ خارجی $\hat{C}$ و .... پس تا وقتی دوباره به نقطهٔ A برگردد روی هم ۳۶۰° می‌چرخد.



$۵ \times ۷۲ = ۳۶۰^\circ$

گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

فصل چهارم: جبر و معادله

بسمه تعالی

درسنامه، نکات و تمرینات فصل چهارم ریاضی پایه هشتم.

درس اول: ساده کردن عبارت های جبری

یادآوری

عبارت جبری: هر ترکیبی از عدد یا حروف که به وسیله ی عمل های جبری مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به هم مربوط شوند. مانند: $۵x$، $\frac{۲}{۳a}$، $۹a^۲ - ۴c$

توجه کنید: در یک جمله ای ها علامت ضرب بین عدد و حروف، یا ضرب بین حروف را نمی نویسیم یا اگر هم بخواهیم علامت ضرب قرار دهیم با یک نقطه بین حروف، یا با قرار دادن آن ها در پرانتز نشان می دهند.

یک جمله ی جبری: اگر در یک عبارت جبری بین حروف و اعداد فقط از علامت ضرب استفاده شود، آنگاه تشکیل جمله ای می دهد. مانند: $۲x^۲$، $۸a^۲b$

چند جمله ی جبری: اگر دو یا چند، یک جمله ای غیرمتشابه را با هم جمع یا تفریق کنیم، آنگاه تشکیل یک چند جمله ای جبری می دهد.

مثال: (سه جمله ای) $۲a - ۶ + ۴x$

(دو جمله ای) $-۳a + ۵b$

نکات مهم

هر عدد به توان یک برابر با خودش است. $x^۱ = x$

یک به توان هر عدد دلخواه، برابر با یک است. $۱^x = ۱$

صفر به توان هر عدد غیرصفر برابر صفر می شود. $۰^x = ۰$ و $(x \neq ۰)$

سه عدد غیرصفر به توان صفر برابر یک می شود. $x^۰ = ۱$ و $(x \neq ۰)$

در ضرب دو عبارت توان دار با پایه های مساوی، یک پایه را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم. $x^a \times x^b = x^{a+b}$

مربع یا مجذور یک عدد $x^۲$

مکعب یک عدد $x^۳$

توجه: لطفا مباحث جبر از کتاب درسی هفتم جهت یادآوری مطالعه گردد.

جملات متشابه: جملاتی که قسمت حروفی و توان آن ها عیناً مثل هم باشند را متشابه گویند.

مثال ۱: الف) $(۴b ، -۹b)$

عبارت $۴b$ و $-۹b$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی «b» یکسان می باشد.

ب) $\left(-\frac{۶}{۵}x^{۲}yz ، ۳x^{۲}yz\right)$

عبارت $-\frac{۶}{۵}x^{۲}yz$ و $۳x^{۲}yz$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی «$x^{۲}yz$ » یکسان می باشد.

مثال ۲: از بین جمله های زیر، جمله های متشابه را پیدا کنید و آن ها را مشخص کنید.

$$-۸x^{۲},\ \frac{۳}{۵}xy,\ ۶ab^{۲},\ x^{۲},\ \frac{۳}{۴}b^{۲}a,\ ۵xy,\ ۴x^{۲}$$

۱) عبارت $-۸x^{۲}$ و $۴x^{۲}$ و $۱x^{۲}$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی $x^{۲}$ یکسان می باشد.
۲) عبارت $\frac{۳}{۵}xy$ و $۵xy$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی xy یکسان می باشد.
۳) عبارت $۶ab^{۲}$ و $\frac{۳}{۴}b^{۲}a$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی $ab^{۲}$ یکسان می باشد.

ساده کردن عبارت جبری

ابتدا جمله های متشابه را مشخص می کنیم، سپس ضرایب جملات متشابه را جمع یا تفریق کرده و جمله های غیرمتشابه به همان صورت می نویسیم.

مثال ۱: عبارت جبری زیر را ساده کنید.

الف) $۶m^{۲} - ۵y + ۳my + ۱۰m^{۲} + ۷my = (۶+۱۰)m^{۲} - ۵y + (۳+۷)my$
$= ۱۶m^{۲} - ۵y + ۱۰my$

مثال ۲: ب) $۳(۴x - ۵x) + ۱۵x^{۲} - ۶x = (۳\times۴)x - (۳\times۵)x + ۱۵x^{۲} - ۶x$

$= ۱۲x - ۱۵x + ۱۵x^{۲} - ۶x = -۹x + ۱۵x^{۲}$

پاسخ: طبق رعایت اولویت ها ابتدا عمل ضرب که مقدم تر بر جمع و تفریق می باشد را انجام می دهیم عدد «۳» را در هر یک از یک جمله ای های درون پرانتز ضرب می کنیم و بقیه جمله را می نویسیم سپس بعد از عمل ضرب عبارت جبری را ساده می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

ب) $۲(xy - ۴) - (۷xy - ۸) = ۲xy - ۸ - ۷xy + ۸ = -۵xy + ۰ = -۵xy$

یک جمله ای یعنی «۲» را در هر یک از جمله های چند جمله ای ضرب می کنیم سپس چند جمله ای که درون پرانتز قرینه می شود. در نتیجه عبارت جبری را ساده می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

تذکر: اگر در یک عبارت جبری جمله های متشابه وجود نداشت آن عبارت قابل ساده شدن نیست.

مثال: الف) $۴x - ۵y$

پاسخ: با هم متشابه نیستند چون قسمت حرفی آن ها «x» و «y» یکسان نمی باشد.

ب) $۲m + ۳a - ۱$

پاسخ: با هم متشابه نیستند چون قسمت حرفی آن ها «a» و «m» یکسان نمی باشد.

ضرب دو جمله ای:

ضریب های عددی در هم و متغیرها نیز در هم ضرب می شوند.

مثال: $۳a(۴b) = (۳ \times ۴)(a \times b) = ۱۲ab$

ضریب a یعنی عدد «۳» را در ضریب b یعنی عدد «۴» ضرب و متغیرها را در هم ضرب می کنیم.

نکته: در ضرب متغیرها اگر متغیرها مثل هم باشند به صورت توان دار نوشته می شوند در غیر این صورت کنار هم نوشته می شوند.

مثال: $-۴n(+۲n) = (-۴ \times ۲)(n \times n) = -۸n^۲$

ضرب یک جمله ای در چندجمله ای: یک جمله ای در هر یک از جمله های چندجمله ای ضرب می شود.

مثال: الف) $۲(۵x - ۳y) = ۲(۵x) - ۲(۳y) = ۱۰x - ۶y$

ب) $\frac{۱}{۳}(۶a - ۱۲b) + ۲(-۵a + ۱۰b) = \frac{۱}{۳}(۶a) - \frac{۱}{۳}(۱۲b) + ۲(-۵a) + ۲(۱۰b)$

$= ۲a - ۴b - ۱۰a + ۲۰b$

ابتدا عدد پشت پرانتز را در یک جمله ای های داخل پرانتز ضرب می کنیم و اگر جملات مشابه داشته باشیم، سپس ساده می کنیم و حاصل عبارت را به دست می آوریم.

ضرب چندجمله ای در چندجمله ای: هر یک از جمله های چند جمله ای اول را در همه جمله های دوم ضرب می کنیم سپس عبارت را ساده می کنیم.

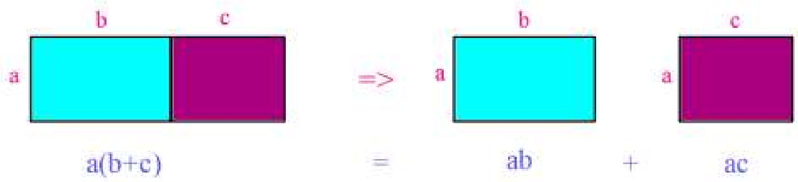
مثال: $(x + ۲)(x + ۱) = x(x) + x(۱) + ۲(x) + ۲(۱) = x^۲ + x + ۲x + ۲ = x^۲ + ۳x + ۲$

نکته: با توجه به اینکه اولویت ضرب نسبت به جمع و تفریق مقدم تر است برای ساده کردن هر عبارت جبری ابتدا ضرب ها را انجام داده سپس جمع و تفریق انجام می دهیم.

مثال: $-۸x^۲y + ۲x(۴xy + ۵) = -۸x^۲y + ۲x(۴xy) + ۲x(۵) = -۸x^۲y + ۸x^۲y + ۱۰x = ۱۰x$

جمله ی اول یعنی «$-۸x^۲y$» را می نویسیم سپس ضرب یک جمله ای در چند جمله ای را طبق توضیحات بالا عمل کرده، یک بار «$۲x$» را در جمله ی اول درون پرانتز یعنی «$۴xy$» و یک بار«$۲x$» را در جمله ی دوم درون پرانتز یعنی«۵» ضرب می کنیم و عبارت به دست آمده را ساده می کنیم.

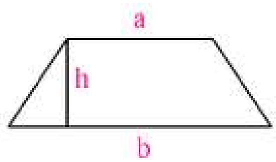
مثال: با توجه به شکل و تساوی مساحت ها در دو قسمت یک تساوی جبری بنویسید.



-

پاسخ: ابتدا یک مستطیل رسم می کنیم و طول آن را به دو قسمت نامساوی تقسیم می کنیم و مساحت آن را به دست می آوریم سپس آن مستطیل را از قسمت طول شکسته و به دو مستطیل با طول های متفاوت ولی عرض های یکسان تقسیم می کنیم سپس مجموع مساحت مستطیل جدید را به دست می آوریم. اگر دو حالت را با هم مقایسه کنیم متوجه می شویم که مساحت هر دو حالت با هم برابر است.

تمرین: مساحت شکل زیر را با عبارت جبری نشان دهید.

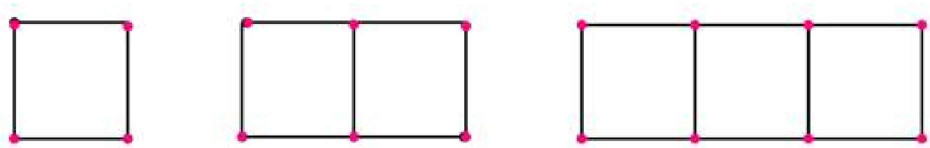


پاسخ: ابتدا مساحت شکل را به صورت فارسی می نویسیم سپس در رابطه به جای کلمات فارسی حروف انگلیسی را قرار می دهیم. در شکل قاعده ها با حروف کوچک a و b و ارتفاع با حرف h نامگذاری شده اند و مساحت را با حرف S نشان می دهیم.

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} \qquad S = \frac{(a+b)\times h}{۲}$$

نکته: برای به دست آوردن محیط اشکال هندسی مانند تمرین قبل ابتدا محیط شکل موردنظر را به صورت فارسی می نویسیم سپس در رابطه به جای کلمات فارسی حرف انگلیسی را جایگزین می کنیم دقت داشته باشید که محیط را با حرف P نشان می دهیم.

تمرین۱: در شکل زیر تعداد چوب کبریت ها در شکل n ام چند تا است؟



(1) (2) (3)

پاسخ: به رابطه های زیر در هر شکل توجه کنید. با کمی دقت متوجه می شوید که شماره های هر شکل در ۳ ضرب شده سپس یک واحد به آن اضافه شده است بنابراین شکل n ام دارای $۳n + ۱$ چوب کبریت خواهد بود.

تمرین۲: جمله ی n ام الگوی جبری زیر را بنویسید.

$۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \dots, n^{۲}$

پاسخ: دقت داشته باشید شماره هر جمله در خودش ضرب شده و در زیر عدد مورد نظر می نویسیم الگوی مورد نظر به دست آوردیم جمله ی n ام که مشخص می شود $n \times n$ برابر می شود $n^{۲}$.

نکته

عدد دو رقمی ab را با نماد $\overline{ab}$ نمایش می دهیم بنابراین $\overline{ab} = ۱۰a + b$

عدد ۴۷ را می توان به صورت گسترده $۴۰ + ۷$ یا $۴ \times ۱۰ + ۷$ نوشت.

مثال: نشان دهید مجموع هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۱۱ می باشد.

پاسخ: $\overline{ab} + \overline{ba} = ۱۰a + b + ۱۰b + a = ۱۱a + ۱۱b = ۱۱(a + b)$

عدد دو رقمی را با توجه به نکته ی بالا $\overline{ab}$ می نویسیم و با مقلوب آن یعنی $\overline{ba}$ جمع می کنیم و بعد از جایگذاری به جای هر کدام و ساده کردن عبارت حاصل را به دست می آوریم.

مثال: نشان دهید تفاضل هر عدد دو رقمی از مقلوبش مضرب ۹ است.

پاسخ: $\overline{ab} - \overline{ba} = ۱۰a + b - (۱۰b + a) = ۱۰a + b - ۱۰b - a = ۹a - ۹b = ۹(a - b)$

عدد دو رقمی را با توجه به نکته ی بالا $\overline{ab}$ می نویسیم و مقلوب آن یعنی $\overline{ba}$ را از آن کم می کنیم و بعد از جایگذاری به جای هر کدام و ساده کردن عبارت حاصل را به دست می آوریم.

مثال عددی: $۹۲ - ۲۹ = ۶۳ = ۹ \times ۷$

$۸۵ - ۵۸ = ۲۷ = ۹ \times ۳$

درس دوم: پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

هر عبارت جبری شامل یک یا چند متغیره اگر به جای این متغیر ها عدد قرار دهیم حاصل آن عبارت جبری به دست می آید.

دانش آموزان عزیز برای پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری در جایگذاری عدد به جای متغیرها به نکته ی زیر دقت کنید.

نکته: در عبارت جبری متغیر را بر می داریم و به جای آن عددی که گفته شده را با پرانتز می گذاریم (اگر پرانتز قرار ندهیم مشکلی پیش نمی آید اما پیشنهاد می کنم که همیشه گذاشتن پرانتز را رعایت کنید)

مثال: مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به ازای مقادیر $a = ۲$ و $b = -۳$ حساب کنید.

الف) $a + ۴ = (۲) + ۴ = ۶$

به جای متغیر «a» مقداری که در سؤال داده شده جایگزین می کنیم و با عدد بعدی جمع می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

نکته: وقتی یک عددی قبل از یک متغیری چسبیده باشد و یا وقتی چند تا متغیر به هم چسبیده باشند یعنی بین آن ها علامت ضرب وجود دارد طبق نکته ی بالا جایگزین می کنیم و با رعایت اولویت های انجام محاسبات به محاسبه ی حاصل عبارت می پردازیم.

ب) $۲a+۶b=۲(۲)+۶(-۳)=۴-۱۸=-۱۴$

ابتدا عدد ۲ را می نویسیم و به جای متغیر «a» مقدار مورد نظر در سؤال را جایگزین می کنیم سپس عدد ۶ را می نویسیم و به جای متغیر «b» مقدار داده شده در سؤال را جایگزین می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

مثال: عبارت های جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $۵xy-۲y+۳ \qquad (x=۲ \quad , \quad y=-۱)$

$$=۵(۲)(-۱)-۲(-۱)+۳=-۱۰+۲+۳=۵$$

در جمله ی اول و دوم چون عدد به متغیرها چسبیده است، عدد را می نویسیم و به جای متغیرها مقادیر داده شده آن ها را جایگزین می کنیم و بعد عملیات ضرب، جمع و تفریق را انجام داده و در نتیجه حاصل را به دست می آوریم.

ب) $-۲a+۵b^۲-۳a^۲b^۳ \qquad (a=-۳ \quad , \quad b=-۱)$

$$=-۲(-۳)+۵(-۱)^۲-۳(-۳)^۲(-۱)^{-۳}=۶+۵+۲۷=۳۸$$

در عبارت داده شده متغیرها توان دار می باشند ابتدا عدد چسبیده به متغیرها را می نویسیم و به جای هر متغیر مقدار داده شده را جایگزین کرده و در پرانتز قرار می دهیم، سپس هر متغیری که توان دارد، توان آن را بالای پرانتز مقدار جایگزین شده قرار می دهیم و با رعایت اولویت ها به محاسبه حاصل عبارت می پردازیم.

اعداد زوج و فرد

اعداد زوج: از ضرب عدد ۲ در یک عدد صحیح، یک عدد زوج به دست می آید.

(اگر k یک عدد صحیح باشد، $۲k$ یک عدد زوج است)

مثال: آیا حاصل جمع دو عدد زوج، عددی زوج است؟

پاسخ: فرض می کنیم a و b دو عدد طبیعی زوج باشند، نشان می دهیم:

$$a=۲n \quad (n\in N) \quad , \quad b=۲m \quad (m\in N) \Rightarrow \quad a+b=۲n+۲m=۲(n+m)=۲k \quad (k\in n)$$

($n+m$ را یک عدد طبیعی مانند k فرض می کنیم)

اگر عدد ۲ در هر عددی ضرب شود حاصل همواره زوج خواهد بود چون تمام اعداد مضرب ۲، زوج هستند.

اعداد فرد: اگر از یک عدد زوج یک واحد کم یا یک واحد به آن اضافه کنیم، عدد فرد به دست می آید.

(اگر h یک عدد صحیح باشد $۲h-۱$ یا $۲h+۱$ یک عدد فرد است)

تمرین۱: نشان دهید حاصلضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است.

پاسخ: فرض می کنیم a عددی طبیعی و زوج و b عددی طبیعی و فرد باشد.

$a = ۲n \quad , \quad b = ۲m - ۱ \quad ; \; (n, m \in N)$

پس a و b را در هم ضرب می کنیم و مقادیر داده شده را جایگزین می کنیم.

$$a \times b = (۲n)(۲m - ۱) = ۲ \times n \times (۲m - ۱) = ۲(۲nm - n) = ۲c$$

($۲nm - n$ را یک عدد طبیعی مانند c فرض می کنیم)

حاصلضرب هر عدد طبیعی در عدد ۲، عددی زوج است.

تمرین۲: عبارت جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$$\frac{۴xy + ۳z}{-۲x + ۵y} \qquad (x = -۱ \quad , \quad y = ۱ \quad , \quad z = ۲\,)$$

$$= \frac{۴(-۱)(۱) + ۳(۲)}{-۲(-۱) + ۵(۱)} = \frac{-۴ + ۶}{+۲ + ۵} = \frac{۲}{۷}$$

ابتدا خط کسری را می کشیم و در صورت کسر عدد «۴» و «۳» با عمل جمع می نویسیم و به جای متغیرها مقادیر داده شده را درون پرانتز جایگزین می کنیم و مخرج کسر را به همین صورت نوشته و محاسبات را انجام داده و حاصل را به دست می آوریم.

تمرین۳: با توجه به رابطه ی x و y ، مقدار y را به دست آورید و جدول زیر را کامل کنید. $\qquad y = -۲x + ۱$

x	y
1	-1
0	1
-1	3

جای x عدد «۱» را در رابطه قرار می دهیم و حاصل به دست آمده را در جدول به جای y می گذاریم نقطه های داده شده در x را به همین صورت در رابطه جایگزین می کنیم و مقدار y را به دست می آوریم.

$$y = -۲(۱) + ۱ = -۲ + ۱ = -۱$$

$$y = -۲(۰) + ۱ = ۰ + ۱ = ۰$$

$$y = -۲(-۱) + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

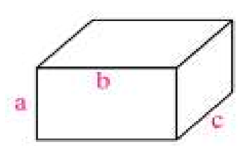
مثال: چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می شود؟

$(۲k + ۱) + (۲t + ۱) = ۲k + ۲t + ۲ = ۲(k + t + ۱) \Rightarrow$ مضرب ۲ است $\Rightarrow$ زوج است

مثال: مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می شود یا فرد؟ چرا؟ فرد

$۲n + (۲m + ۱) = ۲n + ۲m + ۱ = ۲(n + m) + ۱ \Rightarrow$ عددی فرد است

تمرین۴: الف) مساحت کل مکعب مستطیل رو به رو را به صورت جبری بنویسید.



ب) اگر $a = ۲$ و $b = ۶$ و $c = ۳$ باشند مساحت کل چقدر می شود؟

پاسخ: الف) ابتدا فرمول شکل را به صورت جبری می نویسیم

$$\text{کل } S = S' + ۲S \Rightarrow S' = P \times c \Rightarrow ۲(a+b) \times c = ۲ac + ۲bc$$

وقتی مساحت جانبی یعنی «S'» و مساحت مستطیل یعنی «S» را به دست می آوریم $S = a \times b = ab$ مستطیل را در رابطه جایگزین می کنیم.

$$\text{کل } S = ۲ac + ۲bc + ۲ab = ۲(ac + bc + ab)$$

عدد ۲ را در سه جمله فاکتور می گیریم.

ب) بعد از به دست آمدن مساحت کل مقادیر داده شده را جایگزین می کنیم:

$$S = ۲(۱۲ + ۶ + ۱۸) = ۷۲$$

درس سوم: تجزیه ی عبارت های جبری

در تجزیه (تبدیل به ضرب یا فاکتورگیری) عبارت های جبری به روش های زیر عمل می کنیم:

گام۱: اگر هر دو عبارت عدد داشتن «ب.م.م» آن دو عدد را می نویسیم.

گام۲: حروف انگلیسی را با کمترین توانی که در جملات دارند می نویسیم.

گام۳: تمام جملات را بر جمله مشترک به دست آمده تقسیم کرده و حاصل را داخل پرانتز می نویسیم.

مثال: الف) $۷abc + ۳ab$

ابتدا دو عبارت را تجزیه و عامل های مشترک را مشخص می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۷abc = ۷ \times a \times b \times c \\ ۳ab = ۳ \times a \times b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ۷abc + ۳ab = ab(۷c + ۳)$$

ب) $۹x^۲y^۳ - ۱۵x^۳y^۲$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} ۹x^۲y^۳ = ۳ \times ۳ \times x \times x \times y \times y \times y \\ ۱۵x^۳y^۲ = ۳ \times ۵ \times x \times x \times x \times y \times y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ۹x^۲y^۳ - ۱۵x^۳y^۲ = ۳x^۲y^۲(۳y - ۵x)$$

پ) $\frac{x^{۲}y+x^{۲}z}{x^{۲}y-x^{۲}z}$

پاسخ: علامت صورت و مخرج شبیه هم هستند فقط علامت بین آن ها متفاوت می باشد، پس یکی از دو عبارت را تجزیه کرده و جایگزین می کنیم در صورت ساده شدن کسر مورد نظر را ساده می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}y = x \times x \times y \\ \\ x^{۲}z = x \times x \times z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^{۲} = (y+z)$$

$$\frac{x^{۲}y+x^{۲}z}{x^{۲}y-x^{۲}z} = \frac{x^{۲}(y+z)}{x^{۲}(y-z)} = \frac{(y+z)}{(y-z)}$$

نکته: اگر عبارت جبری را بخواهیم به توان برسانیم آن را به تعداد توانش ضرب می کنیم.

مثال: $(x+y)^{۲} = (x+y)(x+y) = x^{۲} + xy + xy + y^{۲} = x^{۲} + ۲xy + y^{۲}$

پاسخ: ابتدا چند جمله ای را به صورت ضرب دو پرانتز می نویسیم سپس مراحل ضرب چند جمله ای در چند جمله ای انجام می دهیم و عبارت جبری را ساده می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

تذکر: به توان رساندن یک عبارت جبری به این معنی نیست که هر جمله آن را به توان برسانیم.

$$(x+y)^{۲} \neq x^{۲} + y^{۲}$$

تمرین۱: عامل های مشترک دو جمله ی جبری را بنویسید.

الف) $۴۴a^{۲},\ ۸۸a^{۲}b$

پاسخ: ابتدا «ب.م.م»، $(۴۴, ۸۸) = ۴۴$ را به دست می آوریم حرف «$a^{۲}$» مشترک است با توان یکسان. در نتیجه عامل مشترک برابر $۴۴a^{۲}$ می باشد.

تمرین۲: عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(۲x-۳y)^{۲} = (۲x-۳y)(۲x-۳y)$

$$= (۲x \times ۲x) + ۲x(-۳y) - ۳y(۲x) - ۳y(-۳y) = ۴x^{۲} - ۶xy - ۶xy + ۹y^{۲}$$

$$= ۴x^{۲} - ۱۲xy + ۹y^{۲}$$

ب) $a^{۲} + b^{۲} - (a-b)^{۲}$

پاسخ: ابتدا چندجمله ای را به صورت ضرب دو پرانتز می نویسیم و طبق مراحل گفته شده حاصل را به دست می آوریم.

$$(a-b)(a-b) = a^{۲} - ab - ab + b^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$$

سپس حاصل به دست آمده را در عبارت جایگزین می کنیم و عبارت درون پرانتز را قرینه می کنیم.

$$= a^۲ + b^۲ - (a^۲ - ۲ab + b^۲) = a^۲ + b^۲ - a^۲ + ۲ab - b^۲ = ۲ab$$

درس چهارم: معادله

معادله: معادله یک تساوی جبری است که به ازای مقادیر خاصی از مجهول برقرار باشد.

حل معادله: برای حل یک معادله باید ابتدا تمام مقداری عددی را به یک تساوی انتقال دهیم و در نهایت با تقسیم کردن مقدار عددی به دست آمده (عدد معلوم) بر ضریب مجهول جواب معادله به دست می آید.

تذکر: وقتی عددی را از یک طرف تساوی به طرف دیگر انتقال دهیم باید علامت آن را تغییر دهیم.

مثال: $۷a - ۲ = ۱۹$

$$۷a = ۱۹ + ۲ \quad \Rightarrow \quad a = \frac{۲۱}{۷} = ۳ \quad \Rightarrow \quad a = ۳$$

ابتدا معادله را مرتب می کنیم معلوم ها یک طرف تساوی و مجهول ها در طرف دیگر تساوی قرار می دهیم. سپس بعد از ساده کردن عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم و مقدار مجهول را به دست می آوریم.

نکته: اگر در معادله پرانتز داشته باشیم با رعایت اولویت ها و با انجام ضرب،پرانتز را از بین می بریم آن گاه معادله را حل می کنیم.

مثال: $۱۲(m - ۲) = ۶m$

پاسخ: $۱۲m - ۲۴ = ۶m \quad \Rightarrow \quad ۱۲m - ۶m = ۲۴ \quad \Rightarrow \quad ۶m = ۲۴ \quad \Rightarrow \quad m = \frac{۲۴}{۶} \quad \Rightarrow \quad m = ۴$

عدد پشت پرانتز را در هر یک از جمله های درون پرانتز ضرب می کنیم سپس معادله را حل می کنیم.

حل معادلات جبری کسری: برای حل معادلات جبری کسری به روش زیر عمل می کنیم.

۱) حل معادلات کسری به روش طرفین وسطین: از روش طرفین وسطین زمانی استفاده می کنیم که فقط دو کسر مساوی داشته باشیم در این روش صورت هر کسر در مخرج کسر دیگر ضرب شده و مخرج ها را حذف می کنیم.

مثال: $\frac{۲x+۱}{۳} = \frac{x-۱}{۴}$

پاسخ: $۴(۲x + ۱) = ۳(x - ۱) \quad \Rightarrow ۸x + ۴ = ۳x - ۳ \quad \Rightarrow ۸x - ۳x = -۳ - ۴$

$$\Rightarrow ۵x = -۷ \Rightarrow x = \frac{-۷}{۵}$$

صورت کسر سمت چپ را باید در ۴ و صورت کسر سمت راست را در ۳ ضرب می کنیم سپس عدد پشت پرانتز را در هر یک از جمله های درون پرانتز ضرب می کنیم آن گاه معادله را حل می کنیم.

تذکر: اگر یکی از عبارت ها بعد از مساوی مخرج نداشت، به آن مخرج می دهیم و طبق مثال قبل معادله را حل می کنیم.

مثال: $\frac{۵x-۳}{۴}=\frac{۲x+۶}{۱}$

پاسخ: $۱(۵x-۳)=۴(۲x+۶) \Rightarrow ۵x-۳=۸x+۲۴ \Rightarrow ۵x-۸x=۲۴+۳$

$-۳x=۲۷ \Rightarrow x=\frac{-۲۷}{۳} \Rightarrow x=-۹$

چون عبارت بعد از مساوی مخرج ندارد به آن مخرج ۱ می دهیم صورت کسر اولی را باید در۱ و صورت کسر دومی را باید در ۴ ضرب کنیم.

۲) حل معادلات کسری به روش حذف مخرج یا مخرج مشترک: روش مخرج مشترک گرفتن برای کسرها را بلدیم برای معادلات کسری هم می توانیم همان کار را انجام دهیم اما در معادلات کسری به مخرج کسرها احتیاجی نداریم. به همین دلیل، این روش را حذف مخرج می گوییم.

مثال: $\frac{x+۲}{۱۵}+\frac{x+۱}{۱۰}=\frac{۸x+۱}{۳۰}$

$[۱۵,۱۰,۳۰]=۳۰$ و $\frac{(x+۲)\times ۲}{۱۵\times ۲}+\frac{(x+۱)\times ۳}{۱۰\times ۳}=\frac{(۸x+۱)\times ۱}{۳۰\times ۱}$

$۲\times(x+۲)+۳\times(x+۱)=۸x+۱ \Rightarrow ۲x+۴+۳x+۳=۸x+۱$

$۲x+۳x-۸x=۱-۴-۳ \Rightarrow -۳x=-۶ \Rightarrow x=\frac{-۶}{-۳} \Rightarrow x=۲$

۳) حل مساله به کمک معادله: ابتدا مجهول را با حروف انگلیسی کوچک در نظر می گیریم آن گاه با توجه به مسأله، جمله های فارسی را به عدد و علامت های ریاضی تبدیل می کنیم و با حل معادله جواب را به دست می آوریم.

مثال: از ۴ برابر عددی ۷ تا کم کردیم حاصل ۹ شد آن عدد چیست؟

پاسخ: عددنظر مورد $m \Rightarrow ۴m-۷=۹ \Rightarrow ۴m=۹+۷$

$۴m=۹+۷ \Rightarrow ۴m=۱۶ \Rightarrow m=\frac{۱۶}{۴} \Rightarrow m=۴$

نکته: اعداد متوالی را به صورت $(n,n+۱,n+۲,\dots)$ و اعداد فرد یا زوج متوالی را به صورت $(n,n+۲,n+۴,\dots)$ نشان می دهیم.

مثال: مجموع سه عدد فرد متوالی ۵۷ می باشد عدد کوچکتر چند است؟

پاسخ: $n+(n+۲)+(n+۴)=۵۷ \Rightarrow ۳n+۶=۵۷ \Rightarrow ۳n=۵۷-۶$

$۳n=۵۱ \Rightarrow n=\frac{۵۱}{۳} \Rightarrow n=۱۷ \Rightarrow \{۱۷,۱۹,۲۱\} \Rightarrow$ عدد کوچکتر $=۱۷$

دانش آموز عزیز با مرور نکات ارائه شده و برای یادگیری بیشتر، تمرین های این فصل از کتاب درسی را حل کنید

فصل۵: بردار و مختصات

بردار و مختصات

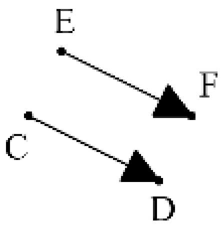
یاد آوری:

بردار: در ریاضی به پاره خط جهت دار، بردار می گوییم.

بردار OA را با $\overrightarrow{OA}$ نشان می دهیم.

تعریف: دو بردار وقتی برابرند که هم راستا، هم اندازه و هم جهت باشند.

مانند بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$:



تعریف: دو بردار را قرینه می گوییم وقتی هم راستا و هم اندازه باشند،

ولی جهت هایشان عکس یکدیگر باشد. مانند دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

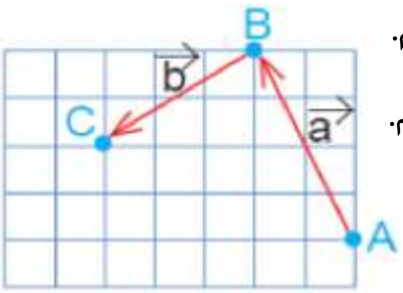
در شکل روبرو:

لطفا مباحث مختصات بردار و بردار انتقال از کتاب درسی هفتم جهت یاد آوری مطالعه گردد.

جمع بردارها

یک مثال: در شکل زیر ابتدا از نقطه ی A بردار انتقال $\vec{a}$ به نقطه ی B می رویم.

یعنی ۲ واحد به سمت چپ (افقی) و ۴ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می کنیم.

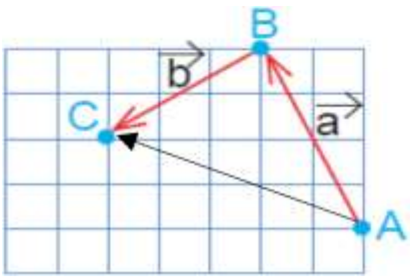


پس بردار انتقال $\vec{a}$ برابر است با : $\vec{a}=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ سپس با بردار انتقال $\vec{b}$ ،

از نقطه ی B به نقطه ی C می رویم: $\vec{b}=\begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$.

نقطه ی A با بردار $\overrightarrow{AC}$ به طور مستقیم به نقطه ی C

منتقل شده است. نام آن را بردار انتقال $\vec{c}$ می گذاریم.



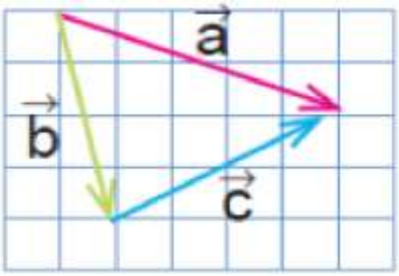
می توان گفت $\vec{c}$ کار دو بردار انتقال $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را انجام

می دهد. به بردار $\vec{c}$ بردار **برآیند** یا **حاصل جمع** می گویند.

اگر بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\+4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\+2\end{bmatrix}$$

که حاصل آن طبق شکل بالا برابر $\begin{bmatrix}-5\\+2\end{bmatrix}=\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ است. بنابراین می توان یک تساوی برداری به صورت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ نوشت. که تساوی مختصاتی آن هم در بالا نوشته شد.



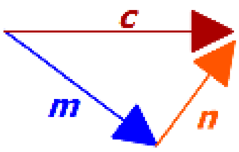
مثال ۱: در شکل روبرو؛ بردار $\vec{a}$ حاصل جمع دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است

جمع برداری : $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$

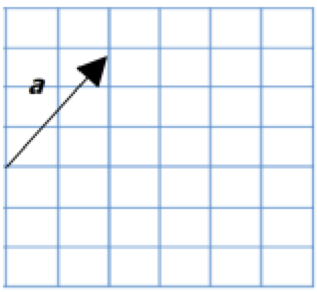
و اگر مختصات آنها را از روی شکل بنویسیم، داریم:

جمع مختصاتی: $\begin{bmatrix}+1\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+4\\+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+5\\-2\end{bmatrix}$

مثال۲: برای شکل زیر یک جمع برداری بنویسید.



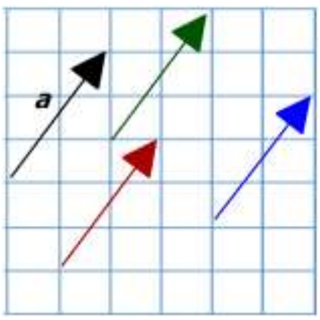
پاسخ: همان طور که می بینیم؛ بردارهای $\vec{m}$ و $\vec{n}$ دنبال هم رسم شده اند، یعنی بردار $\vec{n}$ از انتهای بردار $\vec{m}$ رسم شده است و بردار $\vec{c}$ از اتصال ابتدای $\vec{m}$ به انتهای $\vec{n}$ بدست آمده است پس داریم: $\vec{m}+\vec{n}=\vec{c}$



نکته: بردارهای مساوی را می توان از نقطه های شروع مختلف رسم کرد.

مثلا می خواهیم دو بردار مساوی بردار $\vec{a}$ در شکل روبرو رسم کنیم.

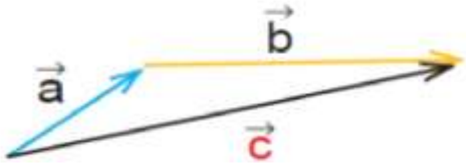
مختصات $\vec{a}$ به صورت $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ است. پس مختصات بردارهای رسم شده هم باید همین باشد:



می توان بردارهای دیگری نیز مساوی بردار $\vec{a}$ رسم کرد.

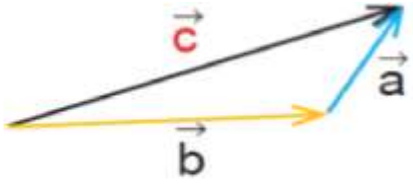
حال با استفاده از نکته بالا می خواهیم حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم کنیم:

ابتدا دو بردار را دنبال هم رسم می کنیم، سپس انتهای $\vec{a}$ را به ابتدای $\vec{b}$ وصل می کنیم بردار حاصل جمع به دست می آید. آن را $\vec{c}$ می نامیم:



پس: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

توجه: جمع بردارها خاصیت جابجایی دارد: یعنی اگر در شکل بالا ابتدا $\vec{b}$ را رسم کنیم و سپس $\vec{a}$ را رسم کنیم باز هم بردار حاصل جمع، بردار $\vec{c}$ خواهد بود:

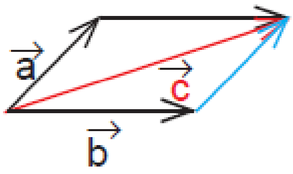


$$\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$$

روشی که در بالا برای رسم بردار حاصل جمع گفته شد، روش مثلثی نام دارد.

روش دیگر برای رسم حاصل جمع دو بردار، روش متوازی الاضلاع نام دارد؛ به این صورت که دو بردار را از یک نقطه ی دلخواه به صورت اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع

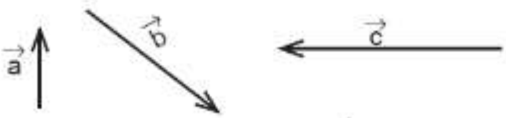
رسم می کنیم، متوازی الاضلاع را تشکیل می دهیم (می دانیم



که ضلع های روبروی متوازی الاضلاع با هم برابرند)

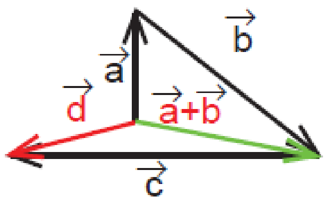
و قطر متوازی الاضلاع، بردار حاصل جمع خواهد بود: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

برای بدست آوردن حاصل جمع سه بردار، ابتدا حاصل جمع دو بردار را به دست می آوریم و سپس بردار حاصل جمع را با بردار سوم جمع می کنیم:



مثال ۳: حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بدست آورید.

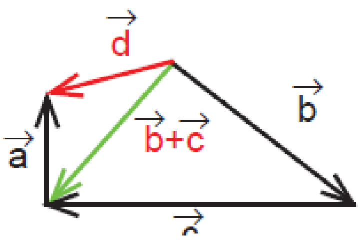
پاسخ: ابتدا بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بدست می آوریم



سپس آن را با $\vec{c}$ جمع می کنیم:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{d}$$

گفتیم که در جمع، ترتیب بردارها اهمیتی ندارد، پس می توان

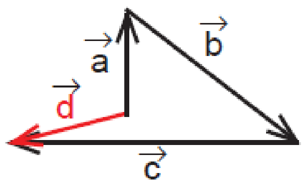


ابتدا $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورد، سپس آن را با $\vec{a}$ جمع کرد:

$$(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}=\vec{d}$$

همان طور که می بینید باز هم بردار حاصل جمع $\vec{d}$ بدست می آید.

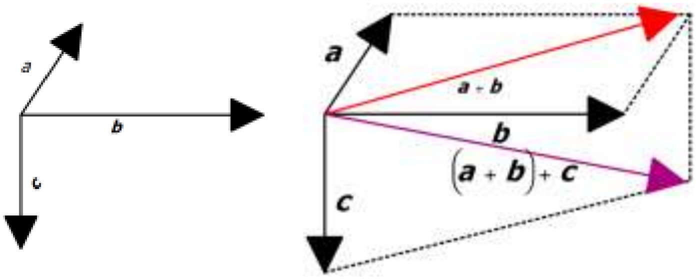
راه حل سوم و البته آسان تر آن است که سه بردار را دنبال هم رسم کنیم (مانند شکل زیر) و سپس ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل کنیم:



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$$

مثال ۴:

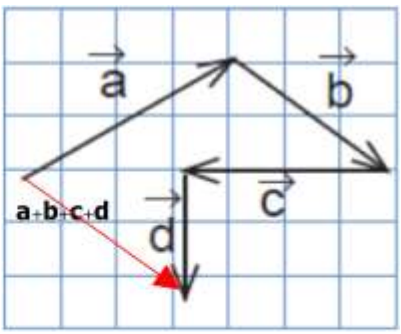
۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



الف) بردار قرمز حاصل جمع بردارهای

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و بردار بنفش بردار

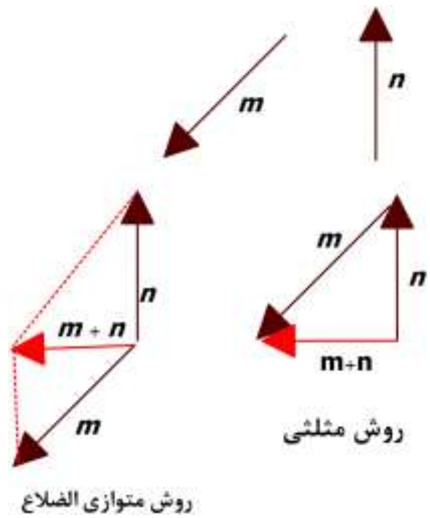
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ است. (روش متوازی الاضلاع)



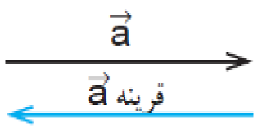
ب) همان طور که می بینید برای بدست آوردن بردار حاصل جمع،

کافی است ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنیم.

ج) در این قسمت برای تمرین بیشتر از هر دو روش استفاده کردیم.

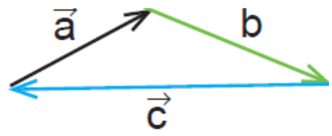


نکته: جمع بردارهای قرینه، برابر بردار صفر است.



آن را با $\vec{o}$ نشان می دهیم و مختصات آن به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است.

قرینه ی $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نشان می دهیم: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$



۲- حاصل جمع بردارهای a و b و c چیست؟ چرا؟

پاسخ: همان طور که می بینید ابتدای بردار a و انتهای بردار c

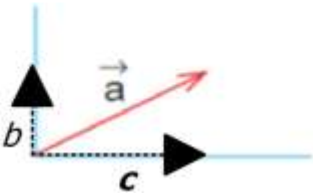
بر یکدیگر منطبق هستند پس حاصل جمع بردارهای a و b و c برابر بردار صفر است:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$$

⁎دانش آموزان عزیز در این قسمت می توانید تمرین های صفحه ۷۳ کتاب درسی خود را حل کنید.

تجزیه ی بردار

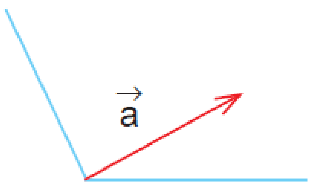
تجزیه ی یک بردار در راستاهای داده شده یعنی دو بردار به دست بیاوریم که حاصل جمع آنها بردار داده شده باشد.

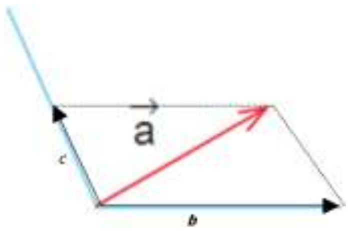


در شکل روبرو بردار a در راستاهای آبی رنگ تجزیه شده است. همان طور

که می بینید تصویر بردار $\vec{a}$ را بر راستاهای داده شده، رسم کرده ایم.

می توان بردار a را به صورت حاصل جمع $\vec{b}$ و $\vec{c}$ نوشت: $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.





مثال۴: بردار a را در راستاهای داده شده تجزیه کنید

بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با استفاده از روش متوازی الاضلاع

طوری رسم می کنیم که $\vec{b}+\vec{c}$ برابر

بردار a شود.

تمرین۱: مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ باشد، بنویسید.

پاسخ: این سوال جواب های متفاوتی دارد. در اینجا دو تا از آنها را می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

شما می توانید جوابهای دیگری بنویسید؟

تمرین۲: در تساوی روبرو x و y را بدست آورید.

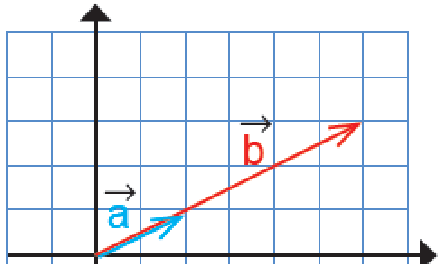
$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x \\ -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ \\ y \end{bmatrix}$$

پاسخ: باید جمع طولهای دو بردار برابر ۷ و مجموع عرضهای آنها برابر y

شود. بنابراین :

$$\begin{cases} ۳+x=۷ \\ -۴+(-۲)=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۷-۳=۴ \\ y=-۴+(-۲)=-۶ \end{cases}$$

ضرب عدد در بردار



بردارهای a و b در شکل زیر را در نظر بگیرید:

این دو بردار هم جهت هستند اما اندازه ی بردار b سه برابر

اندازه ی بردار a است.

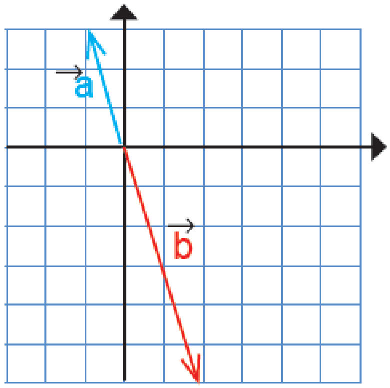
مختصات آنها را می نویسیم و با هم مقایسه می کنیم:

$$a=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}۶\\۳\end{bmatrix}$$

همان طور که می بینید طول و عرض در ۳ ضرب شده اند:

$$۳\times\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۳\end{bmatrix} \qquad ۳\times\vec{a}=\vec{b}$$

اکنون دو بردار زیر را در نظر بگیرید:



همانطور که می بینید این دو بردار هم جهت نیستند. در واقع دو جهت مخالف

دارند. حال مختصات آنها را می نویسیم:

$$a=\begin{bmatrix}-۱\\+۳\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}+۲\\-۶\end{bmatrix}$$

$$(-۲)\times\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+۲\\-۶\end{bmatrix}\Rightarrow(-۲)\times\vec{a}=\vec{b}$$

این دو بردار هم راستا هستند ولی هم جهت نیستند.

پس برای بدست آوردن حاصل ضرب یک عدد در یک بردار آن عدد را در طول و عرض آن بردار ضرب می کنیم:

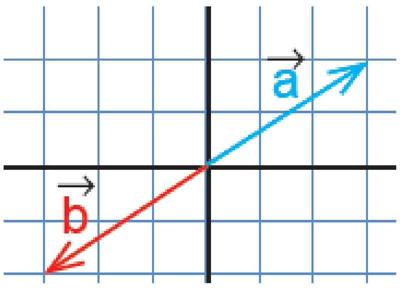
نتیجه:

$$k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$$

❋ اگر عدد مثبتی را در یک بردار ضرب کنیم، بردار حاصل، هم راستا و هم جهت بردار اولی است.

❋ اگر یک عدد منفی در بردار ضرب شود، بردار حاصل، هم راستا ولی در خلاف جهت بردار اولی است.

نکته: اگر بردار b قرینه ی بردار a باشد: (شکل روبرو)

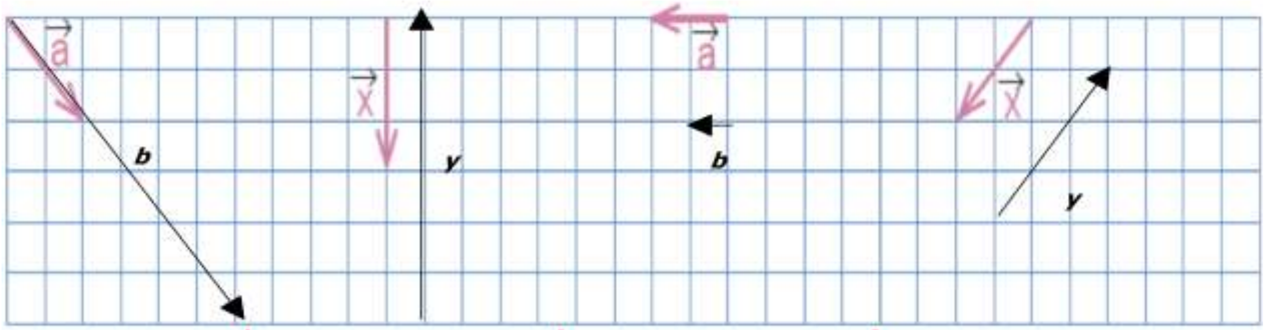


می نویسیم:

$$\vec{b}=-\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{b}=(-۱)\times\vec{a}$$

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{b}=-\vec{a}=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$$

مثال۱: با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



$\vec{b} = ۳\vec{a}$ | $\vec{y} = -۲\vec{x}$ | $\vec{b} = \frac{۱}{۲}\vec{a}$ | $\vec{y} = -\frac{۳}{۲}\vec{x}$

در هر مورد می توانیم مختصات هر بردار و بردار حاصل ضرب را نیز بدست آوریم:

برای مثال:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y} = -\frac{۳}{۲} \times \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

هم چنین برای بردار **a** می توانیم بنویسیم:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \frac{۱}{۲} \times \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

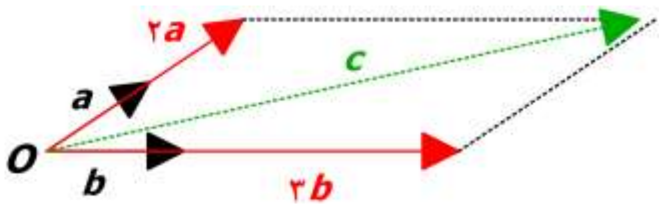
مثال۲: بردارهای **a** و **b** مفروض هستند.

الف) بردار $\vec{c} = ۲\vec{a} + ۳\vec{b}$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا بردارهای **a** و **b** را از نقطه ی دلخواه **O** رسم می کنیم،

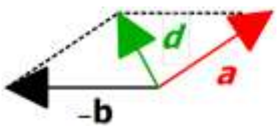
سپس بردارهای $۲\vec{a}$ و $۳\vec{b}$ را رسم می کنیم؛

و سپس بردار حاصل جمع **c** را پیدا می کنیم.

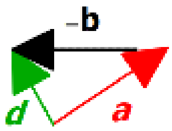


ب) بردار $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ را رسم کنید.

پاسخ: باید بردارهای a و $-\vec{b}$ را با هم جمع کنیم.

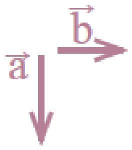


ابتدا بردار های a و $-\vec{b}$ را از یک نقطه رسم می کنیم: روش متوازی الاضلاع



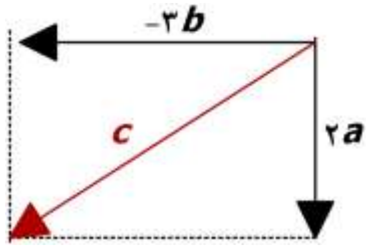
یا دنبال هم رسم می کنیم: روش مثلثی

و همانطور که می بینید بلوار حاصل جمع در هر دو شکل، یکسان است.



مثال ۳: با توجه به بردارهای روبرو، بردار c را رسم کنید.

$$\vec{c} = ۲\vec{a} - ۳\vec{b} = ۲\vec{a} + (-۳\vec{b})$$

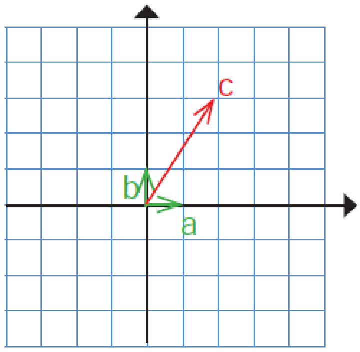


توضیح : ابتدا بردارهای $۲\vec{a}$ و $-۳\vec{b}$ را از یک نقطه رسم می کنیم

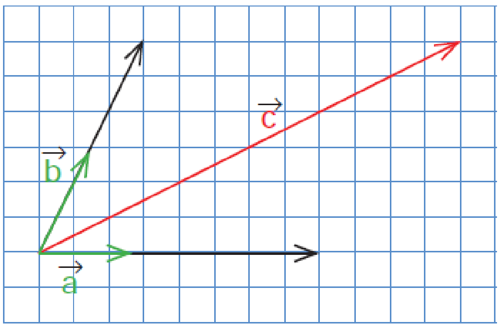
سپس به روش متوازی الاضلاع، بردار حاصل جمع $\vec{c}$ را رسم می کنیم.

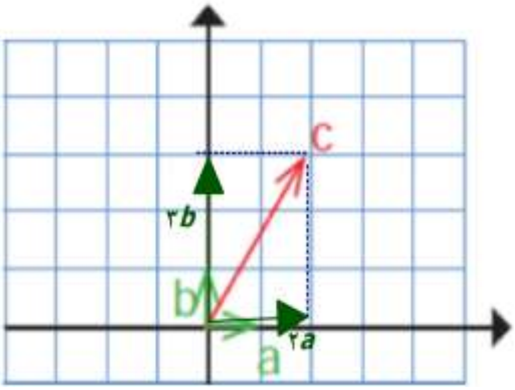
مثال ۴: در هر شکل بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.

الف)



ب)





پاسخ الف): بر حسب نوشتن یعنی بردار c را به صورت

حاصل جمع مضرب هایی از بردارهای a و b بنویسیم.

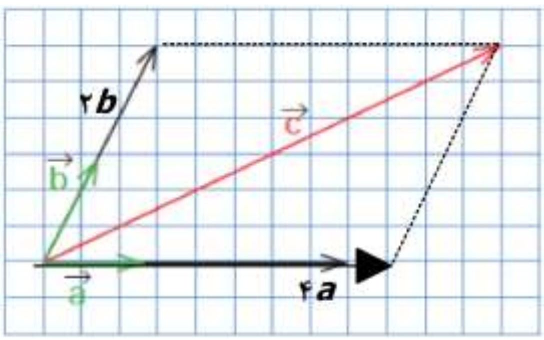
اگر متوازی الاضلاعی تشکیل دهیم که بردار c قطر آن باشد،

مانند شکل روبرو: بردار c برابر می شود با: $\vec{c} = ۲\vec{a} + ۳\vec{b}$

(در شکل روبرو طول بردارهای a و b هر کدام یک واحد است)

پاسخ ب) (در این مثال می توانیم طول بردارهای a و b

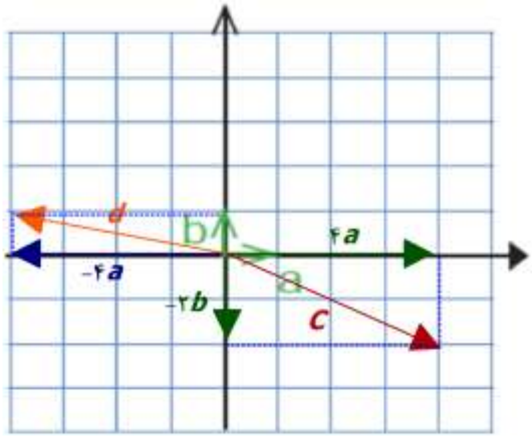
را با خط کش اندازه بگیریم.) $\vec{c} = ۴\vec{a} + ۲\vec{b}$

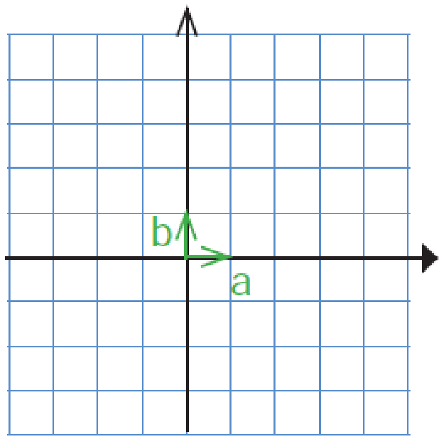


مثال۵: با توجه به بردارهای a و b ، بردارهای c و d را رسم کنید.

$$\vec{c}=۴\vec{a}-۲\vec{b}$$

$$\vec{d}=(-۴\vec{a})+\vec{b}$$





مثال۶: حاصل عبارت روبرو را بدست آورید.

$$-۴\begin{bmatrix}-۵\\ ۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-۴\times(-۵)\\ -۴\times ۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۰-۲\\ -۲۸+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸\\ -۲۷\end{bmatrix}$$

مثال۷: معادله های مختصات زیر را حل کنید. (توجه کنید که در اینجا x یک بردار است.)

الف) $$\begin{bmatrix}۲\\ ۵\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}-۴\\ ۶\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}-۴\\ ۶\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\ ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴-۲\\ ۶-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\ ۱\end{bmatrix}$$

ب) $$-۳x=\begin{bmatrix}۱۵\\ -۹\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}\frac{۱۵}{-۳}\\ \frac{-۹}{-۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۳\end{bmatrix}$$

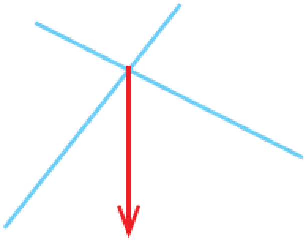
مثال۸: با توجه به بردارهایa و b ، مختصات بردار c را بدست آورید.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\end{bmatrix}\qquad \vec{c}=\vec{a}-۲\vec{b}$$

پاسخ: مختصات بردارهای a و b را در معادله ی بالا جایگزین می کنیم:

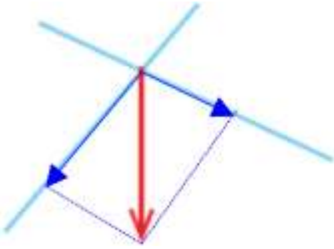
$$\vec{c}=\vec{a}-۲\vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+۴\\ ۱-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\ -۵\end{bmatrix}$$

مثال۹: بردار داده شده را روی امتدادهای رسم شده تجزیه کنید.



پاسخ: به روش متوازی الاضلاع

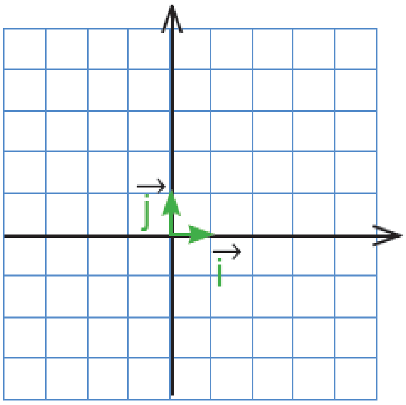
عمل می کنیم :



* دانش آموزان عزیز در اینجا می توانید تمرینهای صفحه ۷۶ و ۷۷ کتاب درسی خود را حل کنید.

بردارهای واحد مختصات

همان طور که می دانیم برای اندازه گیری هر کمیتی از یک واحد استفاده می کنیم. مثلا واحد اندازه گیری زمان، ساعت یا دقیقه یا ثانیه است و واحد اندازه گیری زاویه درجه است. برای اندازه گیری بردار نیز به واحد نیاز داریم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه ی مختصات با دو محور نمایش داده می شود، به واحدی روی هر دو محور نیاز داریم:



بردار $\vec{i}$ بردار واحد طول و بردار $\vec{j}$ بردار واحد عرض نام دارد.

مختصات آنها به صورت

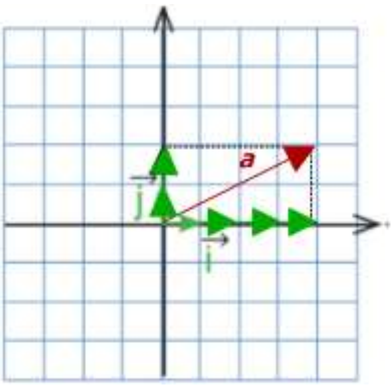
$$\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix} \quad و \quad \vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

است.

هر بردار را می توانیم به صورت حاصل جمع مضربهایی

از دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسیم.

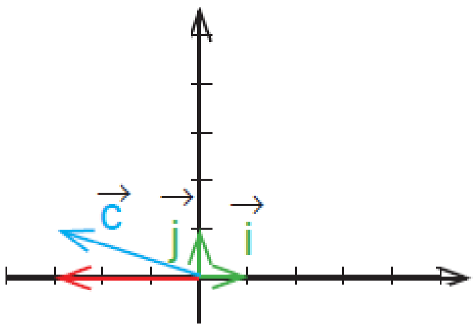
مثلا در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ برابر است با: $\vec{a}=۴\vec{i}+۲\vec{j}$



همچنین می توانیم مختصات بردار $\vec{a}$ را با استفاده از بردارهای

واحد بدست آوریم:

$$\vec{a}=۴\vec{i}+۲\vec{j}=۴\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۰\\ ۰+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}$$



مثال۱: بردار $\vec{c}$ را بر حسب بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.

پاسخ: با توجه به شکل می توانیم بنویسیم: $\vec{c} = -۳\vec{i} + \vec{j}$

و مختصات آن: $\vec{c} = -۳\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۳+۰\\۰+۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}$

مثال۲: بردار زیر را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

$$\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix} + ۴\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$$

یا از این پس می توانیم به صورت مختصر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix} = ۲\vec{i} + ۰\vec{j} = ۲\vec{i} \quad , \quad \begin{bmatrix}۰\\-۶\end{bmatrix} = ۰\vec{i} - ۶\vec{j} = -۶\vec{j} \quad , \quad \begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix} = ۲\vec{i} - ۵\vec{j}$$

مثال۳: طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید.

$$۳\vec{j} = \begin{bmatrix}۰\\۳\end{bmatrix} \qquad ۲\vec{i} - \vec{j} = \begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix} \qquad \vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$$

مثال۴: معادله ی برداری زیر را حل کنید.

$$۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix}-۶\\۳\end{bmatrix}$$

پاسخ: برای حل معادله های برداری می توانیم از دو روش استفاده کنیم:

۱- روش بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$

۲- روش مختصاتی

۱- روش بردارهای واحد:

در این روش مانند حل معادله، علامت جملات پس از انتقال به طرف دیگر معادله تغییر می کند و جملات مشابه با هم جمع می شوند.

$$۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{x} = -۶\vec{i} + ۳\vec{j}$$

$$۳\vec{x} = -۶\vec{i} + ۳\vec{j} - ۲\vec{i} + \vec{j}$$

$$۳\vec{x} = (-۶-۲)\vec{i} + (۳+۲)\vec{j}$$

$$۳\vec{x} = -۸\vec{i} + ۴\vec{j}$$

$$\vec{x} = \frac{-۸}{۳}\vec{i} + \frac{۴}{۳}\vec{j}$$

۲- روش مختصاتی:

در این روش، مختصات بردارها را می نویسیم.

$$۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶-۲ \\ ۳-(-۱) \end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x} = \begin{bmatrix} -۸ \\ ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{-۸}{۳} \\ \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}$$

مثال۵: **اگر** $\vec{a} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j}$ **و** $\vec{b} = ۲\vec{i} + \vec{j}$**، مختصات بردارهای** x **و** y **را بدست آورید.**

$$\vec{x} = ۵\vec{a} + ۳\vec{b} \qquad \vec{y} = \vec{a} - ۲\vec{b}$$

پاسخ: بردارهای a و b را در معادله ی داده شده جایگزین می کنیم.

$$\vec{x} = ۵\vec{a} + ۳\vec{b} = ۵(۳\vec{i} - ۲\vec{j}) + ۳(۲\vec{i} + \vec{j}) =$$

$$۱۵\vec{i} - ۱۰\vec{j} + ۶\vec{i} + ۳\vec{j} = (۱۵+۶)\vec{i} + (-۱۰+۳)\vec{j} = ۲۱\vec{i} - ۷\vec{j}$$

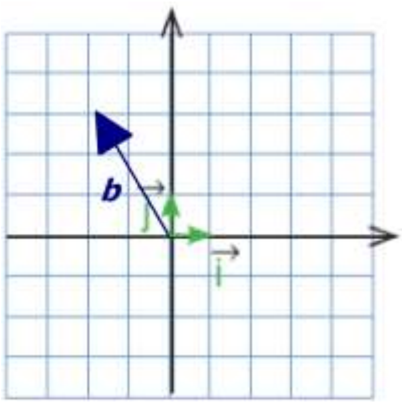
$$\vec{y} = \vec{a} - ۲\vec{b} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} - ۲(۲\vec{i} + \vec{j}) =$$

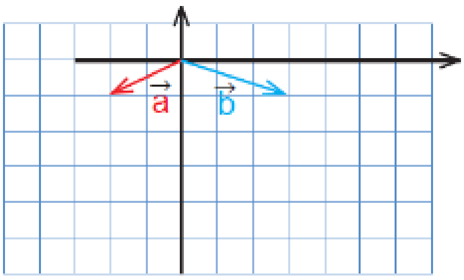
$$۳\vec{i} - ۲\vec{j} - ۴\vec{i} - ۲\vec{j} = -\vec{i} - ۴\vec{j}$$

مثال۶: **بردار** $\vec{b} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ **را در دستگاه مختصات رسم کنید**

و آن را بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}$ **و** $\vec{j}$ **بنویسید.**

$$\vec{b} = -۲\vec{i} + ۳\vec{j}$$





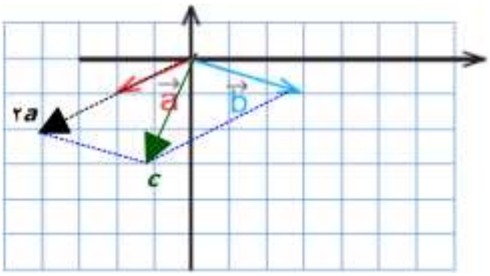
مثال۷: با توجه به شکل زیر مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید.

$$\vec{c} = ۲\vec{a} + \vec{b}$$

الف) رسم شکل و نوشتن مختصات بردار c از روی شکل:

ابتدا بردار $۲a$ را رسم می کنیم و سپس آن را با بردار b

جمع می کنیم. با توجه به شکل روبرو مختصات $\vec{c}$ بدست می آید:



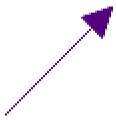
$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و قرار دادن آنها در معادله ی $\vec{c}$:

$$\vec{c} = ۲\vec{a} + \vec{b} = ۲\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴+۳ \\ -۲-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

روش الف هندسی و با استفاده از رسم است و حتما باید از کاغذ شطرنجی استفاده کنیم یا اندازه گیری دقیق انجام دهیم. اما روش ب سریع تر ما را به پاسخ یعنی مختصات $\vec{c}$ می رساند.

نکته: می دانیم اگر طول و عرض یک بردار هر دو مثبت باشند،



شکل تقریبی آن به صورت روبرو خواهد بود:

حال می توانیم جدول زیر را کامل کنیم:

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تقریبی	↗	↖	↘	↙

*دانش آموزان عزیز در اینجا می توانید تمرین های صفحه ۸۰ و ۸۱ کتاب درسی خود را حل کنید.

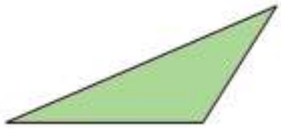
فصل ۶: مثلـــث

درسنامه ، نکات و تمرینات فصل ۶ ریاضی هشتم

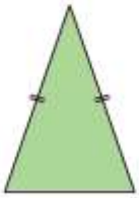
یادآوری:

انواع مثلثها:

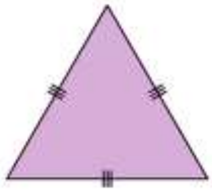
۱)مثلث مختلف الاضلاع



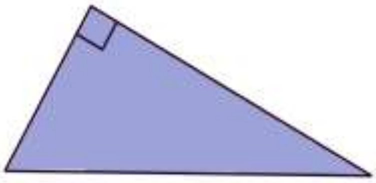
۲) مثلث متساوی الساقین



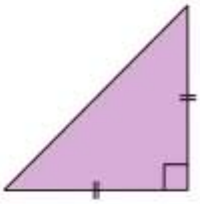
۳) مثلث متساوی الاضلاع



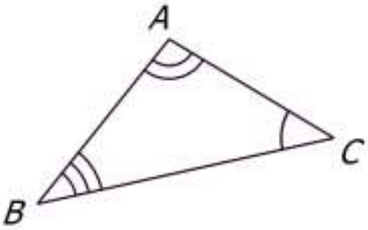
۴) مثلث قائم الزاویه



۵) مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین



می دانید که هر مثلث دارای اجزایی است. به سه زاویه و سه ضلع مثلث اجزای اصلی آن می گویند. به طور مثال در شکل زیر A ،Bو C راس های مثلث AB ، AC و BC نام اضلاع و $\hat{A}$, $\hat{B}$ و $\hat{C}$ نام زوایای مثلث هستند. به نیمساز ,ارتفاع , عمود منصف و ... اجزای فرعی مثلث می گویند .



نیمساز : نیم خطی است که از راس شروع شده و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

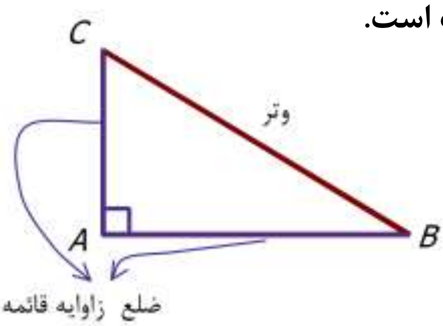
ارتفاع: پاره خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل متصل شده و بر آن عمود باشد .

عمودمنصف: خطی است که از وسط ضلع برآن عمود شده باشد.

میانه: پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.

درس اول: رابطه ی فیثاغورس

همانطور که می دانید یکی از انواع مثلث ها ، مثلث قائم الزاویه است. در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ی قائمه که بزرگترین ضلع مثلث است را وتر می نامیم. در شکل زیر مثلث ABC قائم الزاویه و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است. در این مثلث دو ضلع AB و AC اضلاع زاویه ی قائمه و ضلع BC وتر مثلث است.

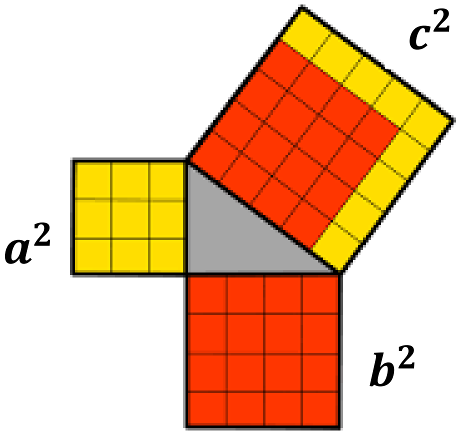


فیثاغورس (فیلسوف و ریاضیدان یونانی) با تحقیق بر روی مثلث قائم الزاویه به این نتیجه رسید:

((مساحت مربعی که با وتر مثلث قائم الزاویه ساخته می شود برابر است با مجموع مساحت دو مربعی که با اضلاع زاویه ی قائمه ساخته می شود.))

این رابطه بعدها رابطه ی فیثاغورس نامیده شد. طبق شکل زیر مساحت هر شکل کنار آن نوشته شده است .

بنابراین :



$c = ۵ \Rightarrow$ مساحت مربع روی وتر : $c^۲ = ۲۵$

$\left.\begin{matrix} a = ۳ \Rightarrow a^۲ = ۹ \\ b = ۴ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ مجموع مساحت ها : $۹ + ۱۶ = ۲۵$

با مقایسه ی دو عبارت داریم:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

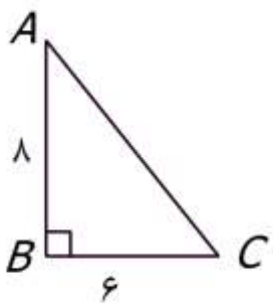
نکته ۱:

در هر مثلث قائم الزاویه مجذور وتر برابر است با مجموع مجذور دو ضلع زاویه ی قائمه

(توضیح: به توان دوم یک عدد مربع یا مجذور آن عدد می گویند. به طور مثال مربع یا مجذور ۷ برابر است با $۷^۲$ یا ۴۹)

برعکس این رابطه نیز برقرار است. یعنی اگر در مثلثی رابطه ی فیثاغورس برقرار باشد (مجذور وتر با مجموع مجذور دو ضلع زاویه ی قائمه برابر باشد) آن مثلث حتما قائم الزاویه است.

از این ویژگی برای تعیین اندازه ی اضلاع مثلث قائم الزاویه یا تشخیص نوع مثلث استفاده می کنیم.



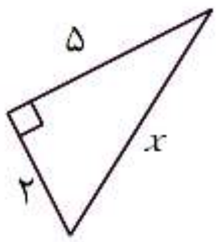
مثال۱: مثلث ABC را درنظر بگیرید.

مساحت مربعی به ضلع AB : ۸×۸ =۶۴

مساحت مربعی به ضلع BC : ۶×۶ =۳۶

بنابراین طبق رابطه ی فیثاغورس داریم: مساحت مربعی به ضلع AC : ۶۴+۳۶=۱۰۰ پس AC=$\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

مثال۲: با توجه به اندازه های داده شده در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



پاسخ: طبق رابطه فیثاغورس داریم :

$$x^۲ = ۲^۲ + ۵^۲ = ۴ + ۲۵ = ۲۹$$
$$x = \sqrt{۲۹}$$

با توجه به این مثال که $(\sqrt{۳})^۲ = \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۹} = ۳$ نکته ی زیر را داریم:

نکته ۲) اگر a عددی مثبت باشد همواره رابطه ی $(\sqrt{a})^۲ = a$ برقرار است.

مثال۳) آیا مثلثی با اضلاع ۵ و ۶ و $\sqrt{۱۱}$ قائم الزاویه است؟

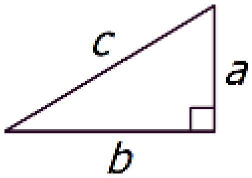
پاسخ: $(\sqrt{۱۱})^۲ + ۵^۲ = ۶^۲ \Leftarrow$

$۶^۲ = ۳۶$: مجذور بزرگترین ضلع

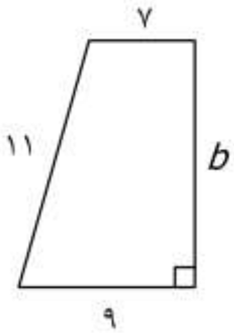
$۵^۲ + (\sqrt{۱۱})^۲ = ۱۱ + ۲۵ = ۳۶$: مجموع مجذور دو ضلع دیگر

بنابراین مثلث مورد نظر قائم الزاویه است.

نکته ۳) دقت کنیم در شکل هایی که مجهول ، ضلع زاویه ی قائمه است از معادل های دیگر رابطه ی فیثاغورس استفاده کنیم .



$$c^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = c^۲ - b^۲ \\ b^۲ = c^۲ - a^۲ \end{cases}$$

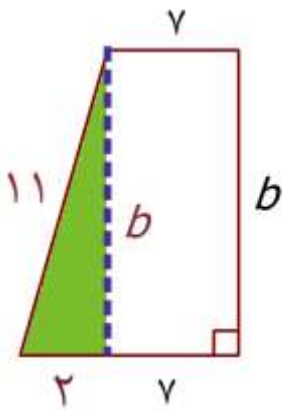


برای حل مثال زیر از نکته ۳ استفاده می کنیم.

مثال۴) در شکل مقابل مقدار b را به دست آورید.

پاسخ:

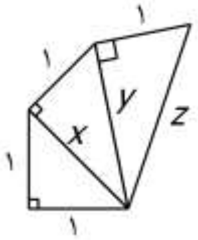
با توجه به شکل زیر ، مثلث قائم الزاویه ای به وتر ۱۱ و ضلع قائمه ی ۲ واحد به وجود می آید و بنا به رابطه ی فیثاغورس داریم:



$$b^۲ = ۱۱^۲ - ۲^۲ = ۱۲۱ - ۴ = ۱۱۷$$

$$b = \sqrt{۱۱۷}$$

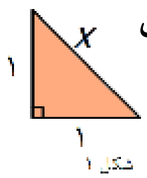
مثال۵) به کمک رابطه ی فیثاغورس محیط شکل مقابل را به دست آورید.



پاسخ:

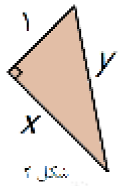
برای محاسبه ی محیط باید مقدار z را به دست آورد بنابراین باید به ترتیب مقادیرx و y و z را محاسبه کنیم.

طبق شکل شماره ۱ ، X وتر مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین است . بنابراین



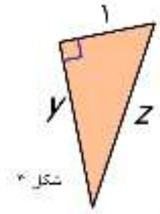
داریم:
$$x^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۱ + ۱ = ۲ \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{۲}$$

با جایگذاری مقدار x در شکل شماره ۲ داریم:



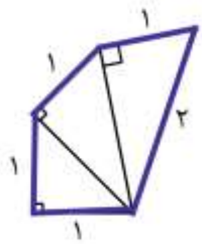
$$y^۲ = ۱^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = ۱ + ۲ = ۳ \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{۳}$$

و با جایگذاری مقدار y در شکل شماره ۳ داریم:



$$z^۲ = ۱^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱ + ۳ = ۴ \quad \Longrightarrow z = \sqrt{۴} = ۲$$

بنابراین مقدار محیط شکل عبارت است از:

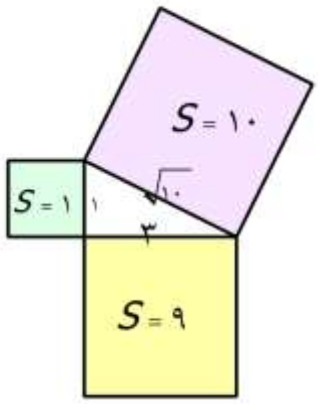


$$P = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ = ۶$$

مثال۶) با استفاده از رابطه ی فیثاغورس پاره خطی به طول $\sqrt{۱۰}$ رسم کنید.

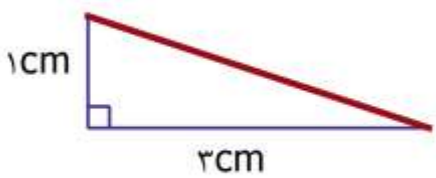
پاسخ:

به کمک رابطه ی فیثاغورس به دو مربع نیاز داریم که مجموع مساحت آنها ۱۰ باشد. به طور مثال با انتخاب مربع هایی به مساحت های ۱ و ۹ (به ضلع ۱ و ۳ سانتیمتر) برای اضلاع مثلث قائم الزاویه طبق رابطه ی فیثاغورس مساحت مربعی که روی وتر ساخته می شود ۱۰ سانتیمتر مربع است پس ضلع این مربع $\sqrt{۱۰}$ خواهد بود .



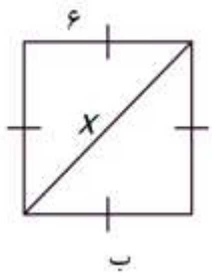
$$x^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰ \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{۱۰}$$

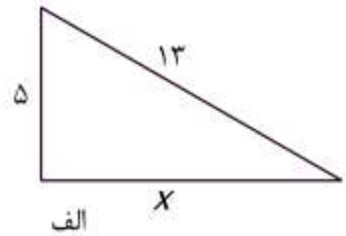
بنابراین کافی است به کمک خط کش و گونیا مثلثی قائم الزاویه که اضلاع زاویه ی قائمه ی آن ۱ و ۳ سانتیمتر هستند، ترسیم کنیم. وتر مثلث ترسیم شده همان پاره خط موردنظر به اندازه ی $\sqrt{۱۰}$ خواهد بود.



به کمک مثال های بالا و نمونه های مشابه حل شده به سوالات زیر پاسخ دهید.

سوال۱: در هر شکل مقدار x را به کمک رابطه ی فیثاغورس به دست آورید.





پاسخ ب)

$$x^{۲} = ۶^{۲} + ۶^{۲} = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲$$
$$x = \sqrt{۷۲}$$

سوال۲: کدامیک از سه تایی های زیر می تواند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشد؟ چرا؟

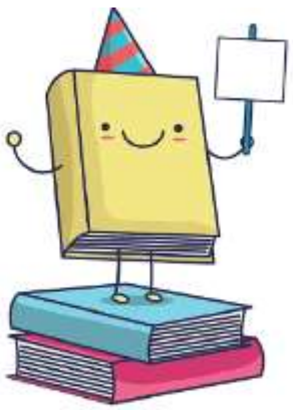
الف) ۲/۵ و ۱/۵ و ۲

ب) ۲و $\sqrt{۶}$ و ۲

پاسخ: $\left.\begin{array}{l} \text{(بزرگترین ضلع)} : \sqrt{۶} \Rightarrow (\sqrt{۶})^{۲} = ۶ \\ ۲^{۲} + ۲^{۲} = ۴ + ۴ = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{۶})^{۲} \neq ۸ \Rightarrow$

مثلث قائم الزاویه نیست

سوال۳: طول و عرض مستطیلی ۱۰ و ۷ سانتیمتر است. قطر این مستطیل را تا یک رقم اعشار به صورت تقریبی محاسبه کنید.



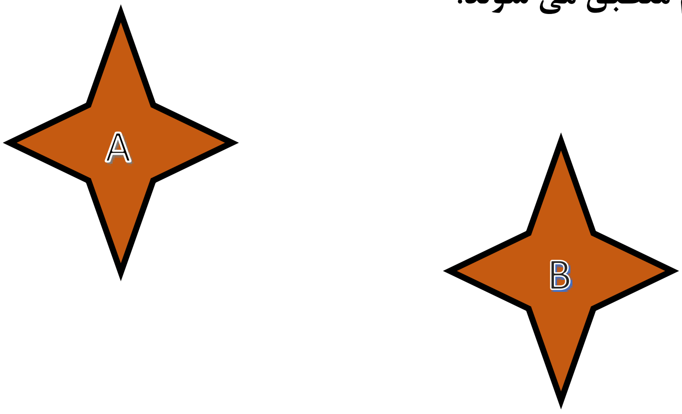
سوال۴: به کمک رابطه ی فیثاغورس پاره خطی به طول $\sqrt{۸}$ رسم کنید.

فرزندم! با مرور نکات بالا از درستی حل تمرین ها اطمینان پیدا کن و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

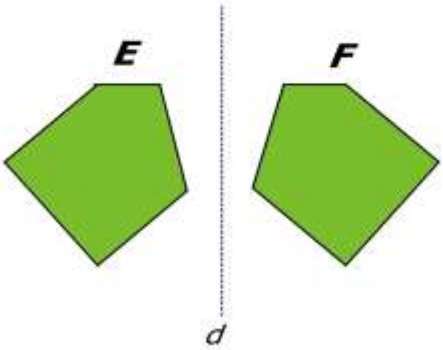
درس دوم: شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال تقارن و دوران) بر شکل دیگری منطبق کنیم طوری که کاملا یکدیگر را بپوشانند می گوییم آن دو شکل هم نهشتند. در واقع دو شکل هم نهشت با هم قابل انطباق اند.

مثال ۱: دو شکل A و B با انتقال بر هم منطبق می شوند.



مثال ۲: دو شکل E و F با تقارن محوری نسبت به خط d بر هم منطبق می شوند .



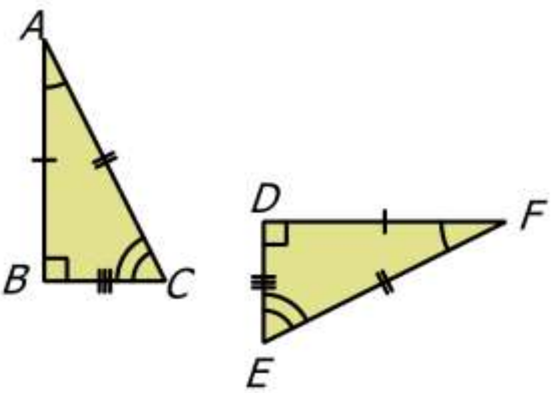
برای نشان دادن هم نهشتی بین دو شکل از علامت $\cong$ استفاده می کنیم به طور مثال در بالا داریم:

$$E \cong F \quad \text{و} \quad A \cong B$$

اجزاء متناظر: اضلاع و زاویه هایی هستند که در هر دو شکل هم نهشت با هم برابرند.

مثال۳: دو مثلث ABC و DEF با دوران بر هم منطبق می شوند.

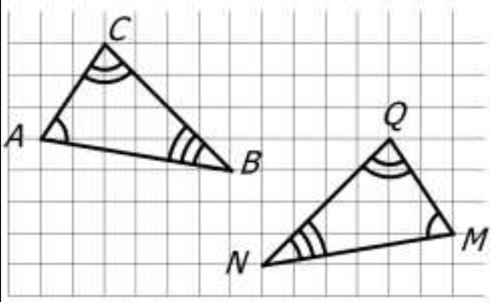
اجزاء متناظردر این دو شکل عبارتند از :



تساوی اجزاء متناظر

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{AB} = \overline{DF} & \hat{A} = \hat{F} \\ \overline{AC} = \overline{EF} & \hat{B} = \hat{D} \\ \overline{BC} = \overline{DE} & \hat{C} = \hat{E} \end{cases}$$

مثال۴:



در شکل داده شده دو مثلث هم نهشتند. تساوی اجزای متناظر را بنویسید.

پاسخ:

$$\Delta ABC \cong \Delta MNQ \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{تساوی اجزاء متناظر}}{\left\{\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{MN} & \hat{A} = \hat{M} \\ \overline{AC} = \overline{QM} & \hat{B} = \hat{N} \\ \overline{BC} = \overline{QN} & \hat{C} = \hat{Q} \end{array}\right.}$$

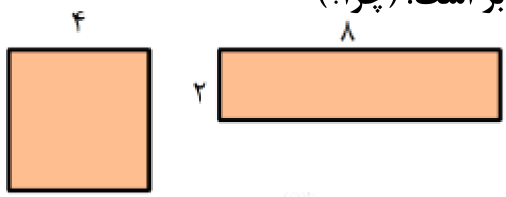
نکته: دقت کنیم محیط (یا مساحت) دو شکل هم نهشت با هم برابرند ولی برعکس این جمله صحیح نیست.

یعنی اگر محیط یا مساحت دو شکل برابر باشد ممکن است آن دو شکل هم نهشت نباشند.

به این دو مثال دقت کنید:

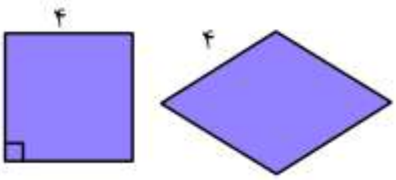
مثال الف) مساحت مربعی به ضلع ۴ و مستطیلی به ابعاد ۲ و ۸ با هم برابر است. (چرا؟)

ولی این دو شکل هم نهشت نیستند.



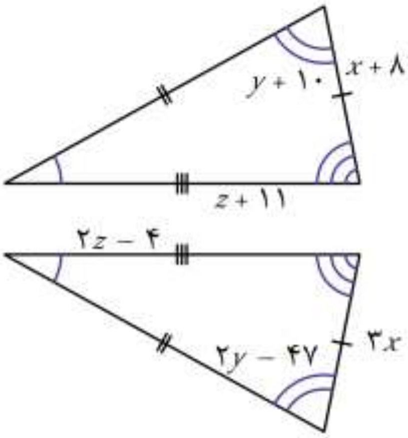
مثال ب) محیط این لوزی و مربع هر دو برابر است. (چرا؟)

ولی هم نهشت نیستند.



به کمک هم نهشتی دو مثلث و تساوی اجزاء آن ها می توان مقادیر مجهول را محاسبه نمود.

مثال۵: دو مثلث داده شده با تقارن محوری بر هم منطبق می شوند. با توجه به اندازه های داده شده مقادیر مجهول را بیابید.

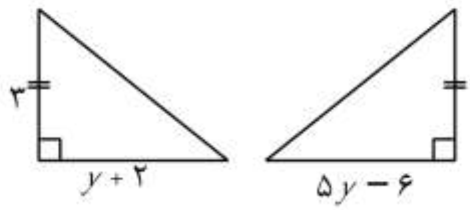


پاسخ: با توجه به تناظر بین اضلاع و زاویه ها داریم:

$$۳x = x + ۸ \quad \Rightarrow \quad ۲x = ۸ \quad \Rightarrow \quad x = ۴$$

$$۲y - ۴۷ = y + ۱۰ \quad \Rightarrow \quad y = ۱۰ + ۴۷ \quad \Rightarrow \quad y = ۵۷$$

$$۲z - ۴ = z + ۱۱ \quad \Rightarrow \quad ۲z - z = ۱۱ + ۴ \quad \Rightarrow \quad z = ۱۵$$



مثال۶: دو مثلث مقابل هم نهشتند. محیط هر کدام چقدر است؟

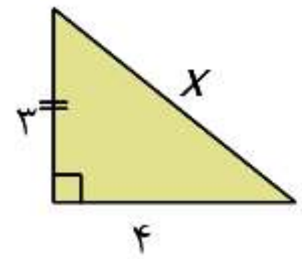
پاسخ: با توجه به تناظر اضلاع دو مثلث داریم:

$$۵\,y - ۶ = y + ۲ \;\Rightarrow\; ۴\,y = ۲ + ۶ = ۸ \;\Rightarrow\; y = \frac{۸}{۴} = ۲$$

با جایگزین کردن مقدار $y = ۲$ در هر کدام از روابط بالا اندازه ی ضلع دوم مثلث را محاسبه می کنیم.

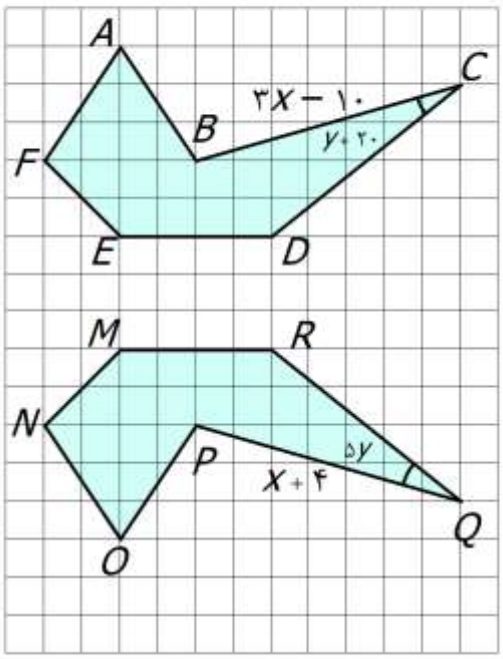
$۵ \times ۲ - ۶ = ۱۰ - ۶ = ۴$ پس دو ضلع زاویه ی قائمه در این مثلث ۳ و ۴ هستند.

به کمک رابطه ی فیثاغورس داریم:



$$x^{۲} = ۴^{۲} + ۳^{۲} = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow x = \sqrt{۲۵} = ۵$$

بنابراین محیط این دو مثلث برابر است با : $p = ۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$



مثال۷: با توجه به شکل مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دو شکل با چه تبدیلی بر هم منطبق می شوند؟

ب) تساوی های زیر را کامل کنید.

$$ABCDEF \cong ----$$

تساوی اجزای متناظر :
$$\begin{cases} \overline{AB} = \ \dots & \hat{A} = \cdots \\ \dots = \overline{QP} & \dots = \hat{N} \\ \overline{ED} = \cdots & \hat{E} = \cdots \end{cases}$$

ج) با تشکیل معادله مقدار X و Y را محاسبه کنید.

د) اندازه ی زاویه ی C و ضلع BC را به دست آورید.

فرزندم! با مرور نکات بالا از درستی حل تمرین ها اطمینان پیدا کن و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

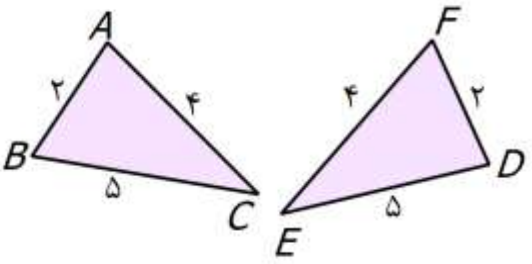
درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

برای اینکه نشان دهیم دو مثلث هم نهشت هستند می توانیم از یکی از حالتهای زیر استفاده کنیم و لازم نیست برابری تمامی اضلاع و زاویه ها بررسی گردد.

حالت اول: برابری سه ضلع (ض ض ض)

اگر سه ضلع از مثلث اول با اضلاع مثلث دوم دو به دو با هم برابر باشند آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

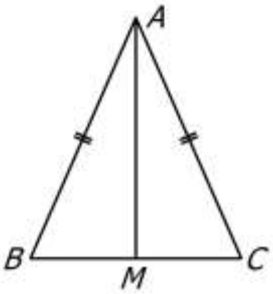
مثال۱: دو مثلث ABC و DEF هم نهشتند زیرا :



بنا به حالت (ض ض ض)

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{FD} = ۲\\ \overline{AC} &= \overline{EF} = ۴\\ \overline{BC} &= \overline{ED} = ۵\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle FDE$$

مثال۲: مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده BC است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟



پاسخ:

ابتدا توجه کنیم که میانه قاعده را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند بنابراین داریم:

زیرا مثلث متساوی الساقین است : $\overline{AB} = \overline{AC}$

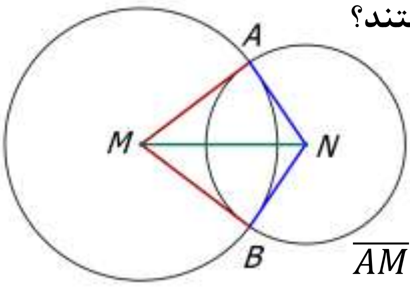
زیرا AM میانه است : $\overline{BM} = \overline{CM}$

زیرا ضلع مشترک دو مثلث است : $\overline{AM} = \overline{AM}$

بنا به حالت (ض ض ض)

$$\Longrightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

مثال۳: نقاط M و N مرکز دو دایره هستند. چرا دو مثلث AMN و BMN هم نهشتند؟



پاسخ: دقت کنیم در یک دایره شعاع ها با هم برابرند. بنابراین :

چون شعاع دایره بزرگ هستند : $\overline{AM} = \overline{BM}$

چون شعاع دایره کوچک هستند : $\overline{AN} = \overline{BN}$

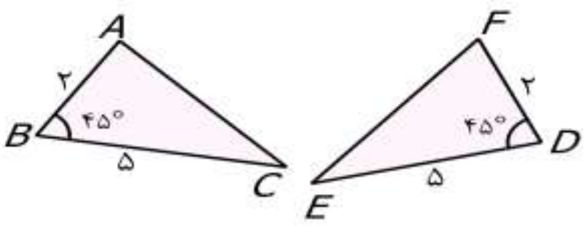
چون ضلع مشترک دو مثلث است: $\overline{MN} = \overline{MN}$

بنا به حالت (ض ض ض)

$$\Longrightarrow \triangle AMN \cong \triangle BMN$$

حالت دوم: برابری دو ضلع و زاویه ی بین آن ها (ض ز ض)

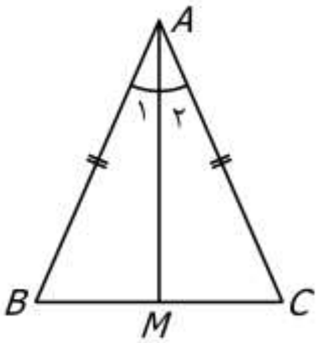
اگر دو ضلع از مثلث اول با دو ضلع از مثلث دوم برابر و زاویه ی بین آن دو ضلع در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.



مثال۱: دو مثلث زیر هم نهشتند زیرا :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{FD}=۲\\ \hat{B}=\hat{D}=۴۵^{\circ}\\ \overline{BC}=\overline{ED}=۵\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}}\triangle ABC\cong\triangle FDE$$

مثال۲: مثلث ABC متساوی الساقین و AM نیمساز زاویه ی A است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟



پاسخ:

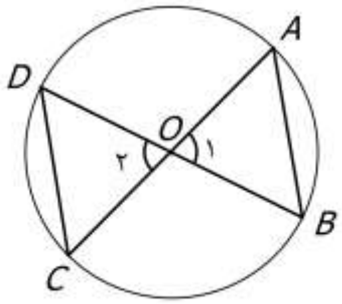
ابتدا توجه کنیم که نیم ساز زاویه ی A را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

بنابراین داریم:

$\overline{AB}=\overline{AC}$: زیرا مثلث متساوی الساقین است

$\widehat{A_۱}=\widehat{A_۲}$: زیرا AM نیمساز $\hat{A}$است $\xRightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}}\triangle ABM\cong\triangle ACM$

$\overline{AM}=\overline{AM}$: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است



مثال۳: نقطه ی O مرکز دایره و AC و BD قطر های دایره هستند.

چرا دو مثلث OAB و OCD هم نهشتند؟

پاسخ: دقت کنیم به زوایایی مانند دو زاویه ی $\widehat{O_۱}$ و $\widehat{O_۲}$ متقابل به راس می گویند و دو زاویه ی متقابل به راس همیشه با هم برابرند. بنا براین داریم:

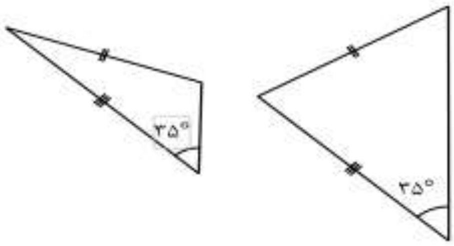
$\overline{OB}=\overline{OC}$: زیرا شعاع دایره هستند

$\widehat{O_۱}=\widehat{O_۲}$: زیرا متقابل به راس هستند $\xRightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}}\triangle OAB\cong\triangle ODC$

$\overline{OA}=\overline{OD}$: زیرا شعاع دایره هستند

نکته: دقت کنیم دراین حالت (ض ز ض) زاویه ی مساوی باید حتما بین دو ضلع متناظر قرار داشته باشد.

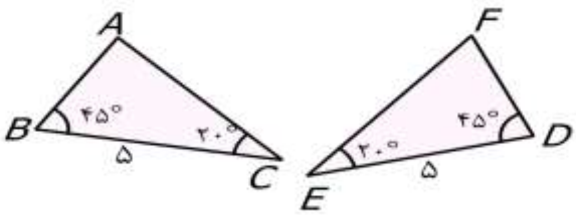
به این مثال توجه کنید.



در این مثال زاویه ی مساوی در دو مثلث بین اضلاع مساوی قرار ندارد و این دو مثلث هم نهشت نیستند.

حالت سوم: برابری دو زاویه و ضلع بین آن ها (ز ض ز)

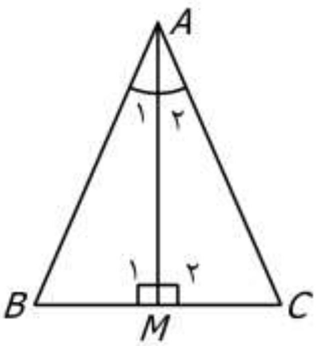
اگر دو زاویه از مثلث اول با دو زاویه از مثلث دوم برابر و ضلع بین آن دو زاویه در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.



مثال۱: دو مثلث زیر هم نهشتند زیرا :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=۴۵^\circ\\ \overline{BC}=\overline{ED}=۵\\ \hat{C}=\hat{E}=۲۰^\circ\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}} \triangle ABC \cong \triangle FDE$$

مثال۲: در مثلث ABC پاره خط AM نیمساز زاویه ی A و بر BC عمود است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟



پاسخ:

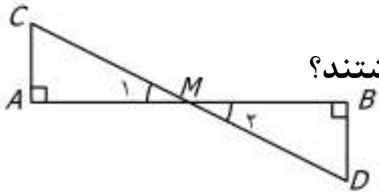
ابتدا توجه کنیم که نیم ساز AM زاویه ی A را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند

و چون بر قاعده ی BC عمود است زوایای $\widehat{M_۱}$ و $\widehat{M_۲}$ قائمه هستند.

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\widehat{M_۱}=\widehat{M_۲}=۹۰^\circ & : \text{زیرا AM بر BC عمود است}\\ \widehat{A_۱}=\widehat{A_۲} & : \text{زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A} \text{است}\\ \overline{AM}=\overline{AM} & : \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

مثال۳: نقطه ی M وسط پاره خط AB است. چرا دو مثلث ACM و BDM هم نهشتند؟

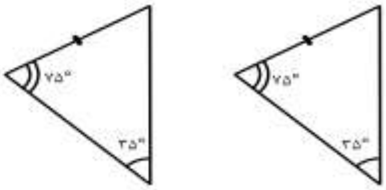


پاسخ:

بنا به حالت (ز ض ز)

$$\triangle ACM \cong \triangle BDM \quad \Longleftarrow \quad \begin{cases} \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} & \text{: زیرا متقابل به راس هستند} \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \\ \overline{AM} = \overline{MB} & \text{: زیرا M وسط پاره خط AB است} \end{cases}$$

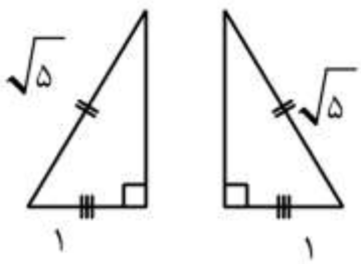
نکته: دقت کنیم اگر ضلع بین دو زاویه ی مساوی نباشد دو مثلث هم نهشتند. زیرا در صورت تساوی دو زاویه در دو مثلث ، زوایای سوم نیز با هم برابرند و به حالت سوم دو مثلث هم نهشت خواهند بود. برای درک بیشتر به مثال زیر دقت کنید.



در این دو مثلث دو زاویه مساوی وجود دارد بنابر این زاویه ی سوم در هر دو مثلث برابر است با : $۱۸۰ - (۷۵ + ۳۵) = ۷۰^\circ$

پس زاویه سوم در هر دو مثلث ۷۰ درجه است و ضلع متناظر بین دو زاویه ی مساوی در دو مثلث(دو زاویه ی ۷۰ و ۷۵ درجه) قرار می گیرد و بنا به حالت سوم دو مثلث هم نهشتند.

در شکل زیر وتر و یک ضلع از هر دو مثلث با هم برابرند. با توجه به شکل های داده شده اندازه ی ضلع سوم در هر مثلث را محاسبه کنید و اندازه ی ضلع سوم را با هم مقایسه کنید.



پاسخ:اگر ضلع سوم را a در نظر بگیریم ، بنا به رابطه ی فیثاغورس

در هر دو مثلث داریم:

$$a^۲ = (\sqrt{۵})^۲ - ۱^۲ = ۵ - ۱ = ۴ \rightarrow a = \sqrt{۴} = ۲$$

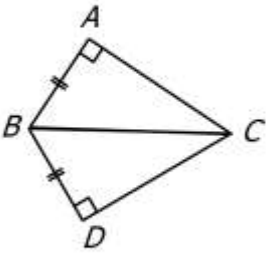
با مقایسه متوجه می شویم که اندازه ی ضلع سوم در هر دو مثلث ۲ واحد است. دقت کنیم که دو مثلث هم نهشتند. (به دلیل داشتن سه ضلع مساوی)

طبق مثال بالا برای مثلث های قائم الزاویه علاوه بر سه حالت قبل می توان حالت هم نهشتی زیر را در نظر گرفت

حالت چهارم: برابری وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه درمثلث قائم الزاویه (و ض)

دقت کنیم این حالت فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

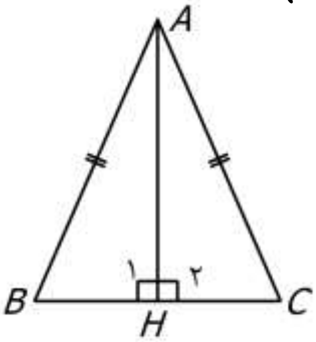
مثال۱: با توجه به شکل داده شده چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟(طبق شکل $\overline{AB}=\overline{DB}$)



پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها BC است داریم:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\widehat{D}=\text{۹۰}^\circ \\ \overline{BC}=\overline{BC} \\ \overline{AB}=\overline{DB}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک ضلع)}} \Delta ABC \cong DBC$$

مثال۲: مثلث ABC متساوی الساقین و AH ارتفاع آن است. چرا دو مثلثABH و ACH هم نهشتند؟



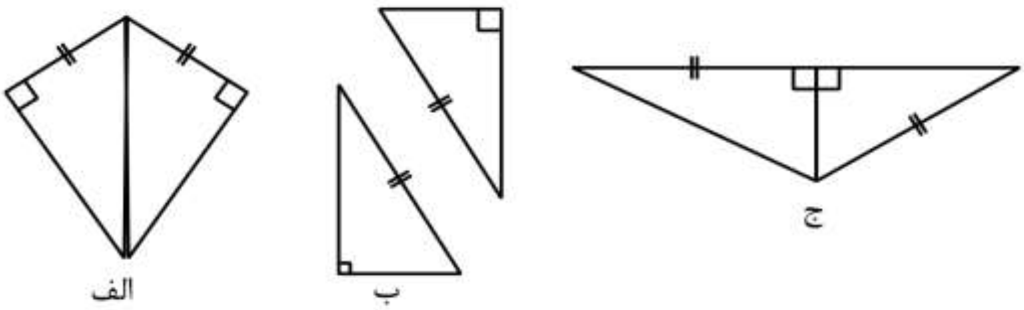
پاسخ:

ابتدا توجه کنیم چون **AH** ارتفاع است پس دو مثلث **ABH** و **ACH** قائم الزاویه هستند و **AB** و **AC** در دو مثلث وتر هستند

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{matrix}\widehat{H_1}=\widehat{H_2}=\text{۹۰}^\circ \\ \overline{AB}=\overline{AC} \\ \overline{AH}\ \text{ضلع مشترک دو مثلث است}\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک ضلع)}} \Delta ABC \cong DBC$$

مثال۳: با توجه به اطلاعات داده شده برای هم نهشتی کدام مثلث ها دلایل کافی داریم؟



پاسخ:

الف) دو مثلث وتر مشترک دارند و یک ضلع زاویه ی قائمه در هر دو مثلث با هم برابرند.

بنا بر این به حالت وتر و یک ضلع که برای خلاصه تر شدن به صورت(و ض)نوشته می شود ، هم نهشتند.

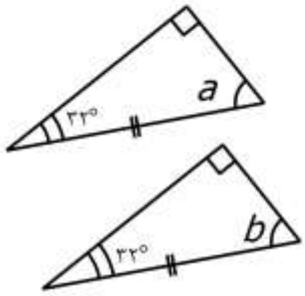
ب) وتر دو مثلث قائم الزاویه در هر دو برابر است ولی در مورد تساوی اضلاع دیگر اطلاعات مساله کافی نیست

پس در این حالت دو مثلث هم نهشت نیستند.

ج) دو مثلث قائم الزاویه هستند و یک ضلع زاویه ی قائمه در هر دو مشترک است ولی اضلاعی که با هم مساوی هستند و تساوی آن ها با علامت مشخص شده در یکی از مثلث ها وتر و در دیگری ضلع زاویه ی قائمه است.

پس دو مثلث هم نهشت نیستند.

در شکل زیر وتر و یک زاویه ی تند از دو مثلث با هم برابرند. با توجه به اندازه های داده شده اندازه ی **a** و **b** را در هر مثلث محاسبه کنید.



پاسخ: در مثلث قائم الزاویه دو زاویه تند متمم یکدیگرند(یعنی مجموع دو زاویه ی تند ۹۰ درجه است) بنابراین برای محاسبه ی **a** یا **b** کافی است اندازه ی زاویه ی تند دیگر را از ۹۰ درجه کم کنیم. پس:

$$a = b = ۹۰ - ۳۲ = ۵۸^{\circ}$$

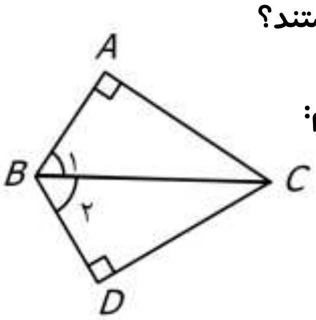
دقت کنیم که دو مثلث هم نهشتند. (به دلیل داشتن دو زاویه و ضلع بین آن ها)

طبق مثال بالا برای مثلث های قائم الزاویه می توان حالت هم نهشتی زیر را در نظر گرفت

حالت پنجم: برابری وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه (و ز)

دقت کنیم این حالت هم مانند حالت قبل فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

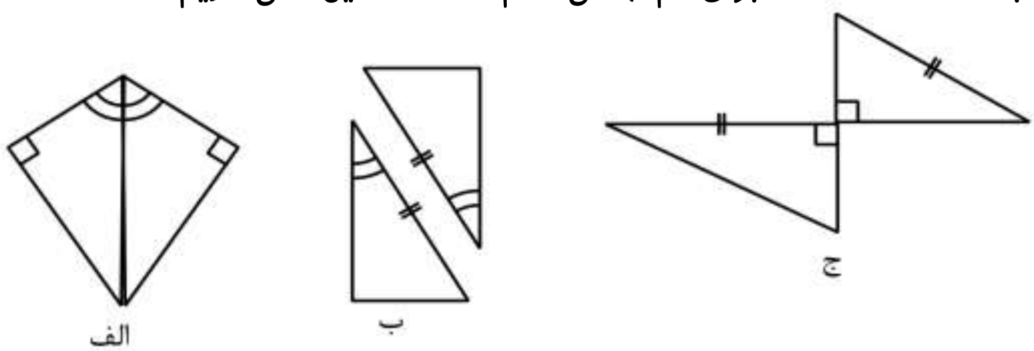
مثال۱: در شکل داده شده BC نیمساز زاویه ی B است. چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟



پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها BC است داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = ۹۰^{\circ} \\ \overline{BC} = \overline{BC} \\ \widehat{B_۱} = \widehat{B_۲} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک زاویه ی تند)}} \Delta ABC \cong DBC$$

مثال۲: با توجه به اطلاعات داده شده برای هم نهشتی کدام مثلث ها دلایل کافی داریم؟



پاسخ:

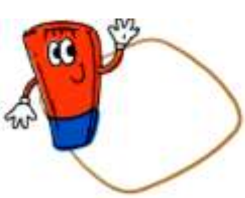
الف) دو مثلث وتر مشترک دارند و یک زاویه ی تند در هر دو مثلث با هم برابرند.

بنا بر این به حالت وتر و یک زاویه ی تند دو مثلث هم نهشتند.

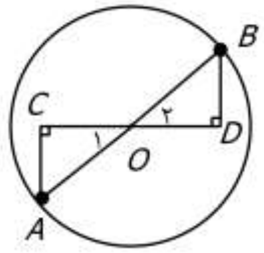
ب) یک ضلع و یک زاویه در هر دو مثلث برابرند ولی در مورد تساوی اجزای دیگر اطلاعات مساله کافی نیست

پس در این حالت دو مثلث هم نهشت نیستند.

ج) دو مثلث قائم الزاویه هستند و وترهای دو مثلث برابرند ولی اطلاعات سوال در مورد تساوی دیگر اجزاء کافی نیست . پس دو مثلث هم نهشت نیستند.



برای جمع بندی مطالب این درس به حل چند تمرین می پردازیم.

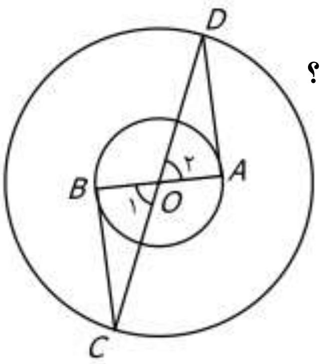


تمرین۱: در شکل مقابل AB قطر دایره است. چرا دو مثلث OAC و OBD هم نهشتند؟

پاسخ:

دقت کنیم OA و OB شعاع دایره و وترهای این دو مثلث قائم الزاویه هستند پس برای نشان دادن هم نهشتی دو مثلث از حالتهای مخصوص مثلث قائم الزاویه با داشتن وتر مساوی استفاده می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} \hat{C}=\hat{D}=۹۰^\circ \\ \widehat{O_۱}=\widehat{O_۲} \\ \overline{OA}=\overline{OB} \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک زاویه ی تند)}} \Delta OAC \cong \Delta OBD$$

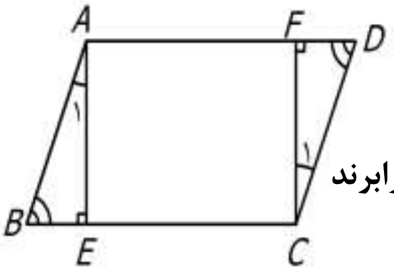


تمرین۲: دو دایره ی داده شده هم مرکز هستندو چرا دو مثلث OAD و OBC هم نهشتند؟

پاسخ:

دقت کنیم OA و OB شعاع های دایره ی کوچک و OC و OD شعاعهای دایره ی بزرگ هستند و دو زاویه ی O متقابل به راس هستند. بنا بر این داریم:

$$\left.\begin{matrix} \overline{OC}=\overline{OD} \\ \widehat{O_۱}=\widehat{O_۲} \\ \overline{OB}=\overline{OA} \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}} \Delta OBC \cong \Delta OAD$$



تمرین۳: چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع و AE و CF بر قاعده های آن عمودند.

الف) چرا دو مثلث ABE و CDF هم نهشتند؟

پاسخ: می دانیم در هر متوازی الاضلاع اضلاع و زاویه های رو به رو دو به دو با هم برابرند از طرفی دو مثلث قائم الزاویه و AB و CD وترهای آن هستند. پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} \hat{E}=\hat{F}=۹۰^\circ \\ \overline{AB}=\overline{CD}\ :\ \text{وتر} \\ \hat{B}=\hat{D}\ :\ \text{دو زاویه تند} \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک زاویه ی تند)}} \Delta ABE \cong \Delta CDF$$

ب) با توجه به قسمت الف و هم نهشتی دو مثلث تساوی های زیر را کامل کنید.

$\overline{AE}=\overline{FC}$ $\qquad$ $\overline{FD}=\overline{BE}$ $\qquad$ $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$

فرزندم! با مرور نکات بالا از درستی حل تمرین ها اطمینان پیدا کن و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

فصل ۷: توان و جذر

بسمه تعالی

درس نامه و نکات کلیدی و حل تمرین های فصل هفتم پایه هشتم

درس اول: یادآوری

✓ نکته: عدد یک به توان هر عددی برسد، حاصلش برابر یک است. $۱^{۷} = ۱$, $۱^{۴} = ۱$

✓ نکته: هر عدد به غیر از صفر به توان صفر برسد، حاصلش برابر با یک است. $۱۵^{۰} = ۱$

✓ نکته: صفر به توان هر عددی به غیر از صفر برسد، حاصلش صفر است. $۰^{۵} = ۰$

✓ نکته: هر عدد به توان یک برسد، حاصلش خود عدد می‌شود. $a^{۱} = a$

✓ نکته: هر عدد توان نداشته باشد، توان آن یک است.

✓ نکته: اگر یک عدد دارای بیش از یک توان باشد و بین آن ها پرانتز وجود داشته باشد توان‌ها در هم ضرب می‌شوند.

$$(a^{m})^{n} = a^{m.n}$$

مثال (

$$۵^{۲}\,{}^{۳} = ۵^{۶}$$

نکته: توان دوم یک عدد همان مجذور یا مربع آن عدد است.

مثال)

$$۰/۱)^{۲} = ۰/۰۱$$

✓ نکته: توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد می نامند.

✓ نکته: اگر یک کسر با پرانتز به توان برسد توان هم برای صورت است و هم برای مخرج .

$\frac{a}{b}{}^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$ اما با کسری که بدون پرانتز به توان برسد مساوی نیست. $\frac{a^{n}}{b} \neq \frac{a^{n}}{b^{n}}$

مثال) $\frac{۳}{۴}^{۲} \neq \frac{۳^{۲}}{۴}$ $\qquad$ $\frac{۳^{۲}}{۴} \neq \frac{۹}{۱۶}$ و $\frac{۳}{۴}^{۲} = \frac{۹}{۱۶}$

✓ نکته: هر گاه یک عدد منفی داخل پرانتز به توان زوج برسد، حاصلش مثبت می‌شود.

مثال) $-۳)^{۲} = +۹$

✓ نکته: هر گاه یک عدد منفی بدون پرانتز به توان زوج برسد، حاصلش منفی می‌شود.

مثال) $-۳^{۲} = -۹$

✓ نکته: هر گاه یک عدد منفی با پرانتز و یا بدون پرانتز به توان فرد برسد، حاصلش منفی می‌شود.

مثال) $-۲)^{۳} = -۸$

قوانین ضرب اعداد توان دار:

۱) $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ $\qquad$ مثال $\Longrightarrow$ $۵^{۷} \times ۵^{۳} = ۵^{۷+۳} = ۵^{۱۰}$

۲) $a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}$ $\qquad$ مثال $\Longrightarrow$ $۶^{۳} \times ۲^{۳} = ۱۲^{۳}$

✓ نکته: اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار پایه ها و توان ها هیچکدام برابر نباشد، در برخی موارد می توان با تجزیه پایه ها به ضرب عدد های اول، آنها را با هم برابر کرد.

مثال) $۲^{۵} \times ۴^{۳} = ۲^{۵} \times (۲^{۲})^{۳} = ۲^{۵} \times ۲^{۶} = ۲^{۱۱}$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس اول را حل کنید.

درس دوم: تقسیم اعداد توان دار

تقسیم دو عدد توان دار با پایه های مساوی: یکی از پایه ها را نوشته، توانها را از هم کم می کنیم.

$$۳)\ a^{m} \div a^{n} = a^{m-n} \quad (a \neq ۰) \qquad \text{مثال} \implies ۵^{۸} \div ۵^{۲} = ۵^{۸-۲} = ۵^{۶}$$

تقسیم دو عدد توان دار با توان های مساوی: یکی از توان ها را نوشته، پایه ها را برهم تقسیم می کنیم.

$$۴)\ a^{m} \div b^{m} = \frac{a}{b}^{\,m} \quad , \quad b \neq ۰ \qquad \text{مثال} \implies -۸^{۲} \div ۴^{۲} = -۲^{۲} = ۲^{۲}$$

✓ نکته: اگر تعدادی عدد توان دار یکسان با هم جمع شوند از خاصیت ضرب استفاده کرده، یکی از اعداد را نوشته و در تعداد ضرب می‌کنیم

مثال) $۳^{۷} + ۳^{۷} + ۳^{۷} = ۳ \times ۳^{۷} = ۳^{۸}$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس دوم را حل کنید.

درس سوم: جذر تقریبی

✓ نکته: ریشه دوم مثبت یک عدد را با علامت $\sqrt{\ }$ (رادیکال) نشان می‌دهیم و به آن جذر یک عدد می‌گوییم.

مثال) $\sqrt{۶۴} = ۸$ $\sqrt{۳۶} = ۶$ $\sqrt{۰/۰۴} = ۰/۲$

✓ نکته: اعداد منفی ریشه دوم (جذر) ندارند. به عنوان مثال $\sqrt{-۳۶}$ جذر ندارد.

✓ نکته: اگر تعداد ارقام اعشاری زوج باشد، زمانی که جذر گرفته می شود تعداد رقمهای اعشارش نصف می‌شود.

مثال) $\sqrt{۰/۰۰۰۱} = ۰/۰۱$

✓ نکته: جذر برخی اعداد دقیق نیست و به صورت اعشاری است. برای به دست آوردن مقدار جذر آن-ها مانند مثال زیر عمل می کنیم.

مثال) جذر تقریبی عدد $\sqrt{۲۸}$ را حساب می‌کنیم:

جذر عدد $\sqrt{۲۸}$ بین دو جذر دقیق $\sqrt{۲۵}$ و $\sqrt{۳۶}$ قرار دارد. $۵ < \sqrt{۲۸} < ۶$

ابتدا عدد وسط بین ۵ و ۶ را که عدد ۵/۵ است در نظر گرفته و عدد ۲۸ را با مجذور ۵/۵ مقایسه می‌کنیم.

$۲۸ < ۳۰/۲۵ \rightarrow (۵/۵)^۲ = ۳۰/۲۵$ و چون عدد ۲۸ از آن کوچک تر است، مقدار جذر مورد نظر بین ۵/۵ و ۵ است.

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴	۵/۵
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶	۳۰/۲۵

عدد ۲۸ بین مجذور ۵/۲ و ۵/۳ قرار دارد. $۲۷/۰۴ < ۲۸ < ۲/۰۹$ ولی چون به ۵/۳ نزدیک‌تر است، در نتیجه مقدار $\sqrt{۲۸}$ تقریباً برابر است با ۵/۳ یعنی $\sqrt{۲۸} \simeq ۵/۳$

نکات جذر:

- ✓ نکته: جذر عدد صفر، خود عدد صفر می‌شود. $\sqrt{۰} = ۰$
- ✓ نکته: جذر عدد یک، خود عدد یک می‌شود. $\sqrt{۱} = ۱$
- ✓ نکته: جذر اعداد کوچک‌تر از واحد (بین صفر و یک)، از خود آن‌ها بزرگ‌تر است.

$\sqrt{۰/۳۶} = ۰/۶$ و $۰/۶ > ۰/۳۶$

- ✓ نکته: جذر اعداد بزرگ‌تر از واحد (بزرگ‌تر از یک)، از خود عدد کوچک‌تر است.

مثال) $۳۶>۶$ و $\sqrt{۳۶} = ۶$

مثال) عدد $\sqrt{۱۷} + ۳$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$$\sqrt{۱۶} < \sqrt{۱۷} < \sqrt{۲۵} \rightarrow ۴ < \sqrt{۱۷} < ۵ \rightarrow ۳+۴<۳+\sqrt{۱۷} < ۳+۵ \rightarrow ۷ < ۳ + \sqrt{۱۷} < ۸$$

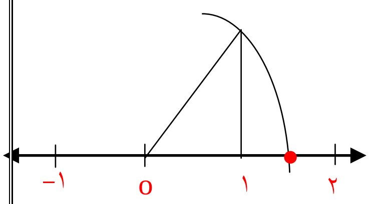
بنابراین عدد $\sqrt{۱۷} + ۳$ بین اعداد ۷ و ۸ قرار دارد.

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس سوم را حل کنید.

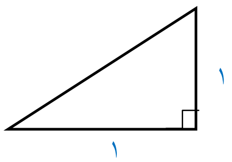
درس چهارم: نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

نمایش اعداد رادیکالی روی محور: برای نمایش اعداد رادیکالی که جذر کامل ندارند، از مثلث های قائم الزاویه و رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم به طوری‌که وتر مثلث برابر با عدد رادیکالی باشد.

مثال ۱) $\sqrt{۲}$ را روی محور رسم کنید.



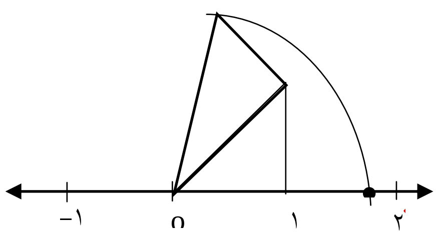
$$x = \sqrt{۲} \quad \to \quad x^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{۱^{۲} + ۱^{۲}}$$



بنابراین مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع قائم ۱ رسم می‌کنیم. وتر این مثلث $\sqrt{۲}$ است. مثلث را روی محور رسم کرده، سوزن پرگار را روی صفر قرار داده و دهانه پرگار را به اندازه وتر باز کرده و کمان می‌زنیم. اگر $+\sqrt{۲}$ باشد کمان به سمت مثبت محور رسم می شود و اگر $-\sqrt{۲}$ باشد کمان به سمت منفی محور رسم می‌شود.

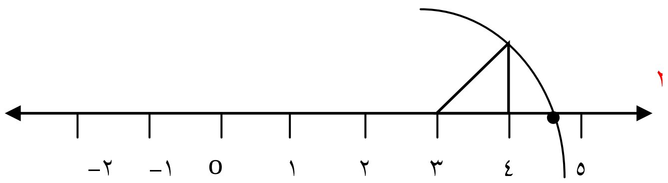
مثال ۲) $\sqrt{۳}$ را روی محور رسم کنید.

$$x^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} \quad \to \quad y^{۲} = x^{۲} + ۱ \quad \to \quad y^{۲} = \sqrt{۲}^{۲} + ۱^{۲} = ۲ + ۱ = ۳ \quad \to y = \sqrt{۳}$$



تذکر: دهانه پرگار را به اندازه آخرین وتر باز می‌کنیم.

تذکر: برای رسم عبارت‌هایی مثل $\sqrt{۲} + ۳$ باید از نقطه ۳+ پاره خطی به اندازه $\sqrt{۲}$ را رسم کرده و چون $\sqrt{۲}$ مثبت است به سمت مثبت کمان می‌زنیم.



خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

نکته ۱: اگر بین دو رادیکال جمع یا تفریق باشد نمی‌توانیم اعداد آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \qquad\qquad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

نکته ۲: اگر دو رادیکال در هم ضرب شده باشند می توانیم اعداد آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم و برعکس.

(a و b نامنفی هستند)

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad\qquad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

نکته ۳: اگر دو رادیکال بر هم تقسیم شده باشند می توانیم یک رادیکال نوشته و اعداد را بر هم تقسیم کنیم و برعکس.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

تذکر: اگر بین اعداد زیر رادیکال عملیات جمع یا تفریق باشد، ابتدا حاصل را به دست آورده و سپس جذر می‌گیریم.

مثال) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$

محاسبه و ساده کردن رادیکال از راه تجزیه و اعداد مربع کامل طبیعی

اعداد مربع کامل طبیعی : به اعدادی که جذر آنها یک عدد طبیعی است مربع کامل طبیعی میگوییم .

مانند $\sqrt{۲۵}$ و $\sqrt{۹}$ و $\sqrt{۳۶}$

عدد زیر رادیکال را تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی که یکی از آنها مربع کامل است، می‌نویسیم. سپس از اعداد مربع کامل جذر گرفته و به صورت ضریب می‌نویسیم.

به عنوان مثال:

$$\sqrt{۷۵} = \sqrt{۳\times۲۵} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{۲^۲\times۵} = \sqrt{۲^۲} \times \sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها: جمع و تفریق رادیکال ها فقط برای رادیکال های متشابه انجام می شود. بدین صورت که ضرایب آن‌ها با هم جمع یا تفریق می‌گردند.

رادیکال‌های متشابه به رادیکال هایی گفته می‌شود که پس از ساده شدن، اعداد زیر رادیکال آنها یکسان باشند.

مثال) $۵\sqrt{۳}$ و $-۲\sqrt{۳}$ متشابه هستند اما $۵\sqrt{۳}$ و $۵\sqrt{۲}$ متشابه نیستند.

تذکر۱: قبل از جمع یا تفریق کردن رادیکال ها، آنها را باید ساده کرد . بدین صورت رادیکال های متشابه مشخص می‌شوند.

تذکر۲: اگر عدد صحیحی در یک عبارت رادیکالی ضرب شود فقط در ضریب آن ضرب می شود. مثال

$$-۳\left(۲\sqrt{۵}\right) = -۶\sqrt{۵}$$

مثال۱) حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۳\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۳} - ۷\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = -۴\sqrt{۲} + ۵\sqrt{۳}$$

مثال ۲) رادیکال زیر را ساده کنید.

$$\overline{۲۸} = \sqrt{۴\times۷} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۷} = ۲\sqrt{۷}$$

مثال ۳) حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۵\sqrt{۲۸} + \sqrt{۳۲} - ۴\sqrt{۷} + \sqrt{۱۸} = ۵ \times ۲\sqrt{۷} + ۴\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۷} + ۳\sqrt{۲}$$

$$= ۱۰\sqrt{۷} - ۴\sqrt{۷} + ۴\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۷} + ۷\sqrt{۲}$$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس چهارم را حل کنید.

فصل ۸: آمار و احتمال

بسمه تعالی

درس نامه و نکات کلیدی و حل تمرین های فصل هشتم پایه هشتم

درس اول: دسته بندی داده ها

علم آمار: علم جمع‌آوری، سازماندهی، تجزیه و تحلیل و تفسیر اطلاعات را علم آمار می‌گوییم.

داده: به اطلاعات عددی جمع‌آوری شده داده گفته می‌شود.

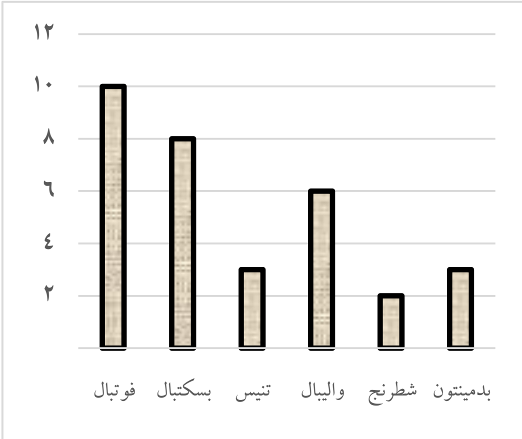
جدول داده‌ها: برای این‌که اطلاعات عددی (داده‌ها) به دست آمده راحت تر مورد استفاده قرار گیرند، آن‌ها را درون یک جدول منظم قرار می‌دهیم که به آن جدول داده‌ها گفته می‌شود.

چوب خط (خط و نشان): برای راحتی و سرعت عمل جمع‌آوری اطلاعات در هر طبقه به ازای هر عدد یک چوب خط می‌گذاریم. پس از چهار چوب خط، چوب خط پنجم را روی آن می‌کشیم (۵=卌).

فراوانی: به تعداد چوب خط‌های هر دسته (طبقه) فراوانی آن دسته گفته می‌شود.

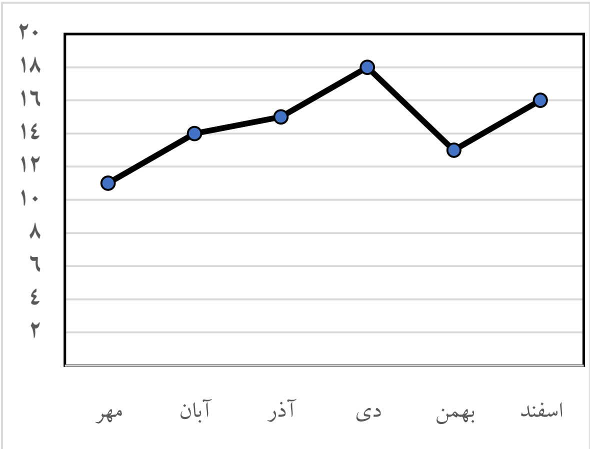
نمودارهای آماری : برای آن‌که بتوان به راحتی داده‌های آماری را واضح و روشن مورد بررسی قرار داد و تصمیم‌گیری کرد، هر یک از جدول های آماری را به وسیله نمودار هایی معرفی می کنیم که به آن ها نمودارهای آماری گفته می‌شود.

نمودار میله‌ای یا ستونی: برای **مقایسه** تعداد یا مقادیر واقعی استفاده می‌شود.



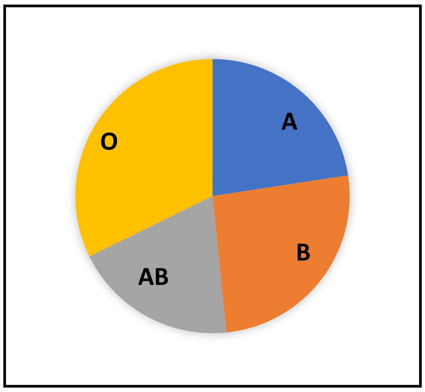
میزان علاقمندی دانش آموزان یک کلاس به رشته های ورزشی مختلف

نمودار خط شکسته : برای نشان دادن **تغییرات** داده‌ها در مدت مشخص استفاده می‌شود.



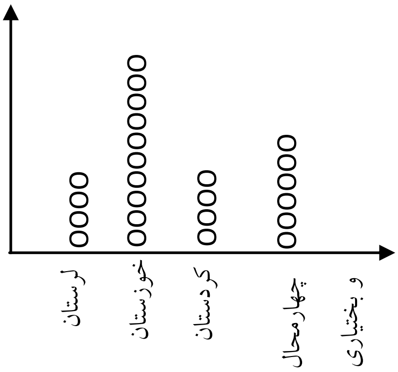
نمودار میانگین نمرات درس ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس در شش ماهه اول سال تحصیلی

نمودار دایره‌ای: برای نمایش تعداد داده‌های هر بخش به نسبت کل، استفاده می شود.



نمودار نسبت گروه‌های مختلف خونی دانش‌آموزان یک مدرسه

نمودار تصویری : برای داده‌های بزرگ و تقریبی استفاده می‌شود.



نمودار برداشت گندم در چهار استان به صورت تقریبی

دامنه تغییرات : به اختلاف بیش‌ترین داده و کم‌ترین داده، دامنه تغییرات گفته می‌شود.

کوچک‌ترین داده − بزرگ‌ترین داده = دامنه تغییرات

طول دسته (حدود دسته): به حاصل تقسیم دامنه تغییرات بر تعداد دسته ها، طول دسته گفته می‌شود.

حدود دسته (طول دسته) = $\dfrac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}}$

مثال) بین نمرات درس ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس کم‌ترین نمره ۴ و بیشترین نمره ۱۹ بوده است.

الف) دامنه تغییرات را به دست آورید.

دامنه تغییرات = بزرگ‌ترین داده − کوچک‌ترین داده = ۱۹ − ۴ = ۱۵

ب) اگر بخواهیم نمرات را به ۵ دسته تقسیم کنیم، طول هر دسته را تعیین کنید.

حدود دسته =

ج) حدود دسته‌ها را تعیین کنید.

دسته اول : ۴ ≤ x < ۷ (۴ + ۳ = ۷)

دسته دوم: ۷ ≤ x < ۱۰

دسته سوم : ۱۰ ≤ x < ۱۳

دسته چهارم : ۱۳ ≤ x < ۱۶

دسته پنجم: ۱۶ ≤ x ≤ ۱۹

✓ نکته: در هر دسته عدد کوچکتر متعلق به خود دسته می باشد ولی عدد بزرگتر متعلق به آن دسته نیست، بجز دسته آخر.

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس اول را حل کنید.

درس دوم: میانگین داده ها

میانگین: میانگین هر تعداد از داده‌های آماری از تقسیم مجموع داده ها بر تعداد آن ها به دست می‌آید. ($\overline{x}$ میانگین و S مجموع داده‌ها و n تعداد داده‌ها $\overline{x} = \frac{S}{n}$

مثال) نمرات چهار درس امیرحسین ۱۸، ۲۰، ۱۴ و ۱۷ است. میانگین نمرات او را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{S}{n} = \frac{۱۸+۲۰+۱۴+۱۷}{۴} = ۱۷/۲۵$$

مثال) میانگین ۶ داده آماری برابر ۱۲ می‌باشد. اگر اعداد ۱۵ و ۱۷ را به این اعداد اضافه کنیم، میانگین جدید را حساب کنید.

مجموع = میانگین × تعداد ← مجموع = ۷۲=۱۲×۶

مجموع جدید = ۷۲ + ۱۵ + ۱۷ = ۱۰۴

تعداد جدید = ۶ + ۲ = ۸

← میانگین جدید = $\frac{۱۰۴}{۸}$ = ۱۳

نکته: اگر از بین داده یک عدد کمتر از میانگین را حذف کنیم، میانگین جدید بیشتر می شود. و برعکس اگر داده بیشتر از میانگین باشد، میانگین جدید کمتر می‌شود.

مثال) میانگین نمرات یک دانش آموز ۱۷/۵ می‌باشد. اگر نمره ۱۹ را از بین نمرات او حذف کنیم، میانگین جدید بیشتر می‌شود یا کمتر؟ چرا؟

پاسخ) میانگین کمتر می‌شود. زیرا نمره ۱۹ از میانگین بیشتر می‌باشد.

نکته: اگر همه داده ها با مقدار ثابتی جمع یا تفریق شوند، میانگین نیز با همان مقدار ثابت جمع یا تفریق می‌شود.

مثال) میانگین نمرات یک دانش آموز ۱۸ می‌باشد. اگر از همه نمرات او ۱/۵ نمره کم کنیم، میانگین نمرات او چقدر می‌شود؟

پاسخ) از میانگین نیز ۱/۵ نمره کم می‌شود. $\bar{x} = ۱۸ - ۱/۵ = ۱۶/۵$

نکته: اگر همه داده ها در مقدار ثابتی ضرب یا تقسیم شوند، آن‌گاه میانگین نیز در همان مقدار ثابت ضرب یا تقسیم می‌شود.

میانگین در جدول آماری : ابتدا یک ستون به عنوان مرکز دسته (متوسط دسته) ایجاد می‌کنیم که مرکز هر دسته را با استفاده از رابطه $\frac{\text{عدد پایین دسته}+\text{عدد بالای دسته}}{۲}$ محاسبه می‌کنیم و در نهایت اگر مجموع اعداد ستون ((فراوانی × متوسط)) را بر مجموع فراوانی ها تقسیم کنیم، میانگین تقریبی به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع ستون} \left(\text{فراوانی} \times \text{متوسط}\right)}{\text{مجموع ستون فراوانی ها}}$$

مثال) جدول زیر را کامل کرده و میانگین را به دست آورید. (عبارت های داخل مستطیل، جواب ها هستند)

حدود دسته‌ها	خط و نشان	فراوانی	متوسط دسته	ط
۱ ≤ x < ۷	$\cancel{||||}$	۵	$\frac{۷+۱}{۲}$ = ۴	۴ × ۵ = ۲۰
۷ ≤ x < ۱۳	|||	۳	$\frac{۱۳+۷}{۲}$ = ۱۰	۳ × ۱۰ = ۳۰
۱۳ ≤ x < ۱۹	||||		$\frac{۱۹+۱۳}{۲}$ = ۱۶	۴ × ۱۶ = ۶۴
مجموع		۱۲		۱۱۴

میانگین = $\frac{۱۱۴}{۱۲}$ = ۹/۵

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس دوم را حل کنید.

درس سوم: احتمال یا اندازه گیری شانس

پیشامد: به اتفاقی گفته می‌شود که ممکن است رخ بدهد یا رخ ندهد. مثل پیشامد رو آمدن در پرتاب سکه

احتمال : به نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد کل حالت های ممکن برای یک پیشامد، احتمال گفته می‌شود.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

مثال) در یک کیسه ۵ مهره سفید، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سبز وجود دارد . یک مهره به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم، احتمال این‌که این مهره قرمز باشد چقدر است؟

تعداد حالت های مطلوب=تعداد مهره های قرمز=۴ تعداد حالت های ممکن=تعداد کل مهره ها= ۱۲

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

پیشامدقطعی(حتمی): پیشامدی که به طور حتم رخ بدهد . احتمال آن یک است . مانند احتمال کمتر از ۷ آمدن در پرتاب تاس.

پیشامد غیرممکن: پیشامدی که اصلا رخ ندهد. احتمال آن مساوی صفر است. مانند احتمال ظاهر شدن عدد ۸ در پرتاب تاس.

نکته: احتمال رخ دادن هر پیشامد عددی از صفر تا یک است، یعنی $۰ \leq P(A) \leq ۱$ است.

مثال) وقتی تاسی را پرتاب می‌کنیم، احتمال این‌که عددی فرد بیاید چند است؟

حالت های ممکن $= \{۱, ۲, ۳,۴, ۵, ۶\} = ۶$ حالت های مطلوب $= \{۱, ۳, ۵\} = ۳$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

نکته: مجموع احتمال های رخ دادن و رخ ندادن یک پیشامد برابر یک است و به کمک

احتمال رخ دادن یک پیشامد می   توان احتمال رخ ندادن آن را محاسبه کرد   .

احتمال رخ دادن $-$ ۱ $=$ احتمال رخ ندادن

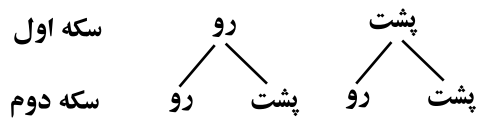
مثال1) احتمال برخورد یک تیر به هدف می‌باشد $\frac{۲}{۹}$. احتمال برخورد نکردن تیر به هدف چقدر است؟

$$۱ - \frac{۲}{۹} = \frac{۹-۲}{۹} = \frac{۷}{۹}$$

بررسی حالت‌های ممکن: برای محاسبه هر نوع احتمال در یک پیشامد ما نیاز به تعداد کل حالت - های ممکن پیشامد داریم، که برای به دست آوردن کل حالت   های ممکن می توان از جدول نظام دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال ۱) یک سکه را دوبار پرتاب می‌کنیم. حالت‌های ممکن را بنویسید.

پاسخ) برای به دست آوردن حالت های ممکن می توان از نمودار درختی استفاده کرد. در نتیجه تعداد کل حالت‌های ممکن ۴ حالت باشد.



(رو-رو) ، (رو-پشت) ، (پشت-رو) ، (پشت-پشت)

مثال ۲) دو تاس را پرتاب می کنیم. با استفاده از جدول نظام دار تعداد کل حالت های ممکن را به دست آورید.

پاسخ) با هر شماره از تاس اول ممکن است ۶ شماره برای تاس دوم بیاید.

تاس اول/ دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱و۱)	(۱و۲)	(۱و۳)	(۱و۴)	(۱و ۵)	(۱و۶)
۲	(۲و۱)	(۲و۲)	(۲و ۳)	(۲و ۴)	(۲و ۵)	(۲و ۶)
۳	(۳و۱)	(۳و ۲)	(۳و ۳)	(۳و ۴)	(۳و ۵)	(۳و ۶)
۴	(۴و۱)	(۴و ۲)	(۴و ۳)	(۴و ۴)	(۴و ۵)	(۴و ۶)
۵	(۵و۱)	(۵و۲)	(۵و۳)	(۵و۴)	(۵و ۵)	(۵و ۶)
۶	(۶و۱)	(۶و۲)	(۶و۳)	(۶و۴)	(۶و ۵)	(۶و ۶)

بنابراین برای پرتاب دو تاس ۳۶ حالت ممکن وجود دارد

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس سوم را حل کنید.

فصل ۹: دایره ها

بسمه تعالی

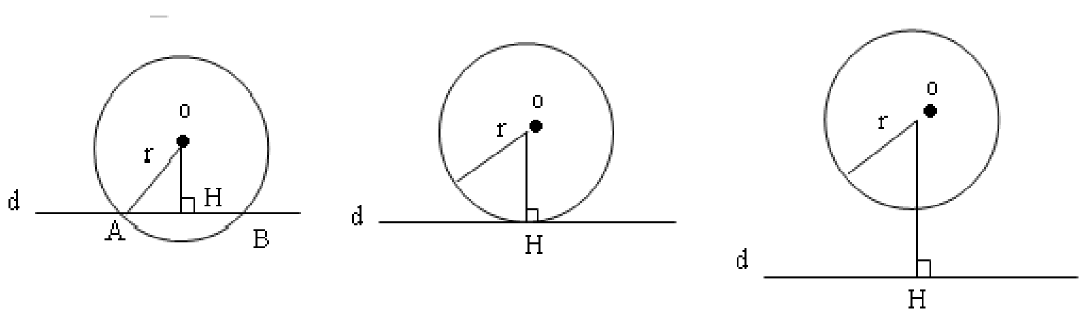
درس نامه و نکات کلیدی و حل تمرین های فصل نهم پایه هشتم

درس اول: خط و دایره

دایره: مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که از یک نقطه به نام مرکز دایره به یک فاصله است . این فاصله شعاع دایره نامیده می‌شود.

نکته: فاصله یک نقطه از یک خط (کوتاه‌ترین فاصله) طول پاره خطی است که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

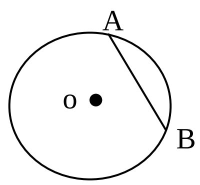
وضعیت خط و دایره



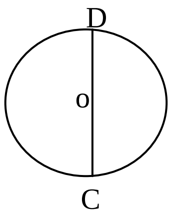
۱) خط خارج از دایره است.	۱) خط بر دایره مماس است.	۱) خط از داخل دایره می‌گذرد.
۲) $OH > r$	۲) $OH = r$	۲) $OH < r$
۳) خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.	۳) خط و دایره یک نقطه مشترک دارند.	۳) خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.

تذکر ۱: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

تذکر ۲: وتر دایره، پاره خطی است که دو سر یک کمان را به هم وصل می‌کند.

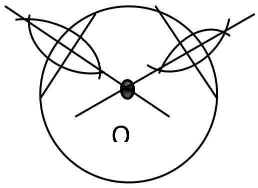


تذکر۳: بزرگترین وتر دایره، قطر دایره است که از مرکز آن می گذرد و دایره را به دو کمان مساوی ۱۸۰ درجه تقسیم می کند.

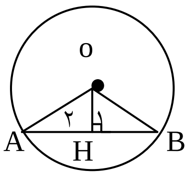


وتر $\overline{CD}$ = قطر دایره

تعیین مرکز دایره: دو وتر غیرموازی رسم کرده و سپس عمود منصف هر دو وتر را رسم می کنیم. محل برخورد دو عمود منصف مرکز دایره است (O مرکز دایره است).



سوال ۱: نشان دهید اگر خطی از مرکز دایره بر وتر عمود شود، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند (O مرکز دایره است).



$\Delta\ AOH \cong \Delta\ BOH$ به حالت وتر و یک ضلع

$\overline{OA} = \overline{OB}$ (شعاع دایره) فرض مسئله

$\overline{OH} = \overline{OH}$ ضلع مشترک

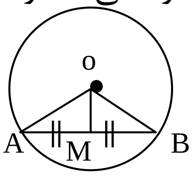
استدلال

بنابراین← $AH = HB$

نتیجه: اگر خطی از مرکز دایره بر وتر عمود شود، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

$$\widehat{H}_۱ = \widehat{H}_۲ = ۹۰ \quad \rightarrow \quad \overline{AH} = \overline{HB}$$

سوال ۲: نشان دهید اگر خطی از مرکز دایره به وسط وتر رسم کنیم بر آن وتر عمود می شود (O مرکز دایره است).



$\overline{OA} = \overline{OB}$ شعاع دایره

$\overline{AM} = \overline{MB}$

و $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ = ۹۰$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ (شعاع دایره) فرض مسئله

استدلال $\overline{OM} = \overline{OM}$ ضلع مشترک به حالت(ض ض ض $\Delta\, AOM \cong \Delta\, BOM$

$\overline{AM} = \overline{MB}$ فرض مسئله

بنابراین← $M_{۱} = M_{۲} = ۹۰$

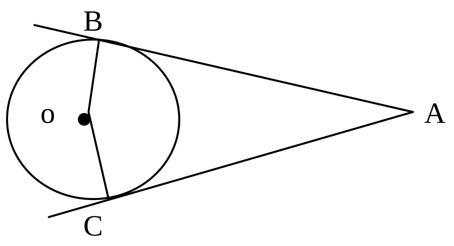
نتیجه: اگر خطی از مرکز دایره به وسط یک وتر رسم کنیم، بر آن وتر عمود می‌شود.

$\overline{AM} = \overline{MB} \quad \rightarrow \quad M_{۱} = M_{۲} = ۹۰$

و در آخر از دو سوال بالا نتیجه می گیریم:

فاصله مرکز دایره از وتر، طول پاره خطی است که از مرکز دایره بر وتر عمود شده و آن را نصف می‌کند.

نکته: از هر نقطه خارج از دایره، دو مماس می توان بر دایره رسم کرد که طول هر دو مماس با هم برابر است.

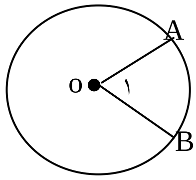


برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس اول را حل کنید.

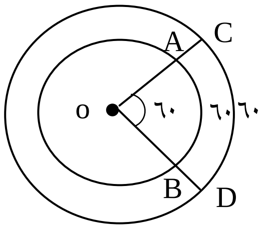
درس دوم: زاویه مرکزی

زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند.

اندازه زاویه مرکزی برابر است با اندازه کمان روبروی آن. $\hat{O}_{۱} = \widehat{AB}$



یک رابطه مهم:



$$\frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } \widehat{AB}}{۳۶۰}$$

مثال 1) اگر $\overline{OB} = ۱cm$ باشد، طول کمان $\widehat{AB}$ چقدر است؟

محیط دایره $\Rightarrow \quad ۲\pi r = ۱ \times ۲ \times \pi = ۲\pi$

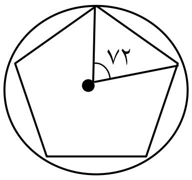
$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{x}{\pi ۲} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\cancel{۶۰}^{۱} \times ۲\pi}{\cancel{۳۶۰}_{۶}} = \frac{\pi}{۳}$$

مثال 2) اگر $\overline{OD} = ۲cm$ باشد، طول کمان CD چقدر است؟

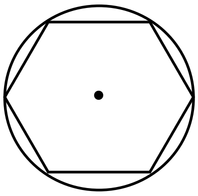
محیط دایره $\Rightarrow \quad ۲ \times ۲ \times \pi = ۴\pi$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{x}{\pi ۴} \quad \rightarrow \quad x = \frac{۶۰ \times ۴\pi}{۳۶۰} = \frac{۲\pi}{۳}$$

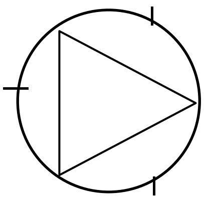
طریقه رسم پنج ضلعی منتظم: ابتدا ۳۶۰ را تقسیم بر ۵ کرده و اندازه زاویه مرکزی ۵ ضلعی منتظم را به دست می آوریم. $\left(\frac{۳۶۰}{۵} = ۷۲\right)$ حال زاویه مرکزی ۷۲ درجه را رسم می‌کنیم. دهانه پرگار را به اندازه کمان ۷۲ درجه باز کرده و سوزن پرگار را روی یکی از نقاط برخورد اضلاع زاویه با محیط دایره قرار داده و کمان های پی‌درپی می‌زنیم. حال نقاط ایجاد شده را به هم وصل می‌کنیم.



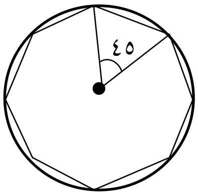
طریقه رسم شش ضلعی منتظم : دهانه پرگار را به اندازه شعاع موردنظر باز کرده و از یک نقطه دلخواه روی محیط دایره کمان های پی‌درپی می‌زنیم. بدین ترتیب دایره به ۶ کمان مساوی تقسیم می‌شود. حال نقاط به دست آمده را به هم وصل می‌کنیم.



طریقه رسم سه ضلعی منتظم : مانند آنچه برای شش ضلعی منتظم بود عمل می - کنیم ولی نقاط به دست آمده را یکی در میان به هم وصل می‌کنیم.

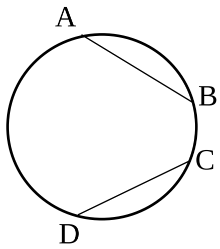


طریقه رسم هشت ضلعی منتظم: ابتدا ۳۶۰ را بر ۸ تقسیم کرده و اندازه زاویه مرکزی ۸ ضلعی منتظم را به دست می آوریم $\left(\frac{۳۶۰}{۸} = ۴۵\right)$. دهانه پرگار را به اندازه کمان ۴۵ درجه باز کرده و از یک نقطه دلخواه کمان‌های پی‌درپی می‌زنیم. حال نقاط ایجاد شده را به هم وصل می - کنیم.



نکته ۱: برای رسم هر n ضلعی منتظم مشابه روش‌های بالا عمل می‌کنیم.

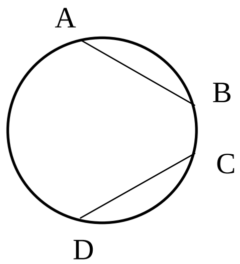
نکته ۲: وترهای نظیر کمان‌های مساوی با یکدیگر برابر می‌باشند.



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \overline{CD}$$

نکته ۳: کمان‌های نظیر وترهای مساوی با یکدیگر برابر هستند.

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



نکته ۴: قطر دایره، دایره را به دو کمان ۱۸۰ درجه تقسیم می‌کند.

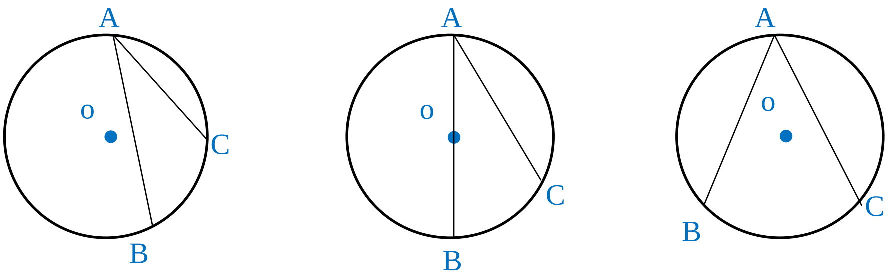
نکته ۵: محیط دایره، برابر ۳۶۰ درجه است.

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس دوم را حل کنید.

درس سوم: زاویه محاطی

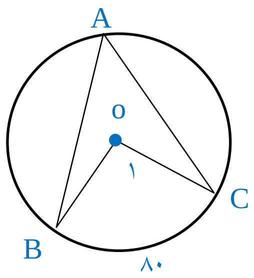
زاویه محاطی: به زاویه‌ای گفته می‌شود که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهای دایره باشند.

با توجه به مرکز دایره و وضعیت قرارگرفتن وترها نسبت به مرکز دایره، سه نوع زاویه محاطی می توانیم ایجاد کنیم.



✓ **اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبروی آن است.** $\leftrightarrow$ $\boxed{\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{۲}}$

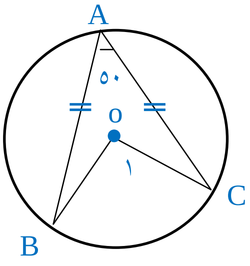
سوال 1) در شکل مقابل اندازه زاویه‌های خواسته شده را به دست آورید.



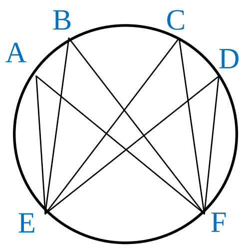
$\hat{A} = ۴۰^{\circ}$

$\hat{O}_{۱} = ۸۰^{\circ}$

سوال 2) در شکل مقابل اندازه زاویه‌های خواسته شده را به دست آورید.



$\hat{O}_{۱} = ۱۰۰^{\circ}$ $\quad \widehat{AB} = ۱۳۰^{\circ}$ $\quad \widehat{BC} = ۱۰۰^{\circ}$

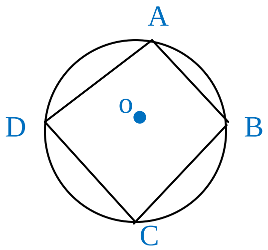


نکته ۱: بی‌شمار زاویه محاطی رو به روی یک کمان وجود دارد.

نکته ۲: زوایای محاطی رو به روی یک کمان با هم برابرند.

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{EF}}{۲} \;,\quad \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{EF}}{۲} \;,\quad \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{EF}}{۲} \;,\quad \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{EF}}{۲} \qquad \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$$

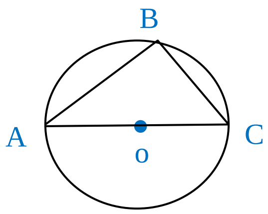
نکته ۳: به **چهارضلعی که چهار رأس آن روی محیط دایره باشد، چهارضلعی محاطی گفته می-شود. و زاویه‌های روبرو در این چهارضلعی مکمل یکدیگرند.**



$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^{\circ}$$

$$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^{\circ}$$

نکته ۴ : زاویه محاطی رو به روی قطر ۹۰ درجه است.



$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۱۸۰^{\circ}}{۲} = ۹۰^{\circ}$$

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس سوم را حل کنید.